



LANTBRUKSHÖGSKOLAN
UPPSALA

Kompendium i elementär hydromekanik

II: Hydromekanikens tillämpning

John Sandsborg

INSTITUTIONEN FÖR MARKVETENSKAP

AVDELNINGEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK

STENCILTRYCK NR 66

UPPSALA 1973

KOMPENDIUM I ELEMENTÄR HYDROMEKANIK

II: HYDROMEKANIKENS TILLÄMPNING

av

John Sandsborg

LANTERUKSHÖGSKOLAN

Institutionen för markvetenskap
Avdelningen för lantbrukets hydroteknik

STENCILTRYCK NR 66

UPPSALA 1973

Del 2. Hydromekanikens tillämpning

Kapitel 8. Mätningar i strömmande medium	3
8.1 Tryckmätningar	4
8.2 Hastighetsmätningar	5
8.3 Flödesmätningar	8
8.4 Turbulensmätningar	29
8.5 Viskositetsmätningar	30
 Kapitel 9. Pump- och hydroforanläggningar	 33
9.1 För pumpanläggningar grundläggande begrepp och definitioner	 34
9.2 Centrifugalpumpar	36
9.3 Vattenringpumpar	41
9.4 Kolvpumpar	44
9.5 Hydroforanläggningar	49
 Kapitel 10. Stationär strömning i slutna ledningar	 53
10.1 Tryck- och energilinjer	54
10.2 Håvert	59
10.3 Rörledningar i serie	62
10.4 Parallella rörledningar	67
10.5 Slutna ledningar med icke cirkulära tvär- sektioner	 70
 Kapitel 11. Stationär strömning i öppna ledningar	 72
11.1 Klassifikation av strömning i öppna ledningar	73
11.2 Fördelaktigaste kanaltvårsnittet	74
11.3 Vattensprång	78
11.4 Specifik energi, kritiskt djup	81
11.5 Differentialekvationen för olikformig (va- rierad) stationär strömning	 86
11.6 Praktiska formler för beräkning av olik- formig strömning	 93
 Appendix. Partiella derivator och totala differentialer.	 99

Hydromekanikens tillämpning

8. Mätningar i strömmande medium

8.1 Tryckmätningar

Mätningar av trycket görs ofta som komplement till mätningar av en vätskas eller gas' hastighet och flöde på grund av sambandet mellan hastighet och tryck, givet genom energiekvationen.

Statiska trycket hos en vätska eller en gas i rörelse är dess tryck, då hastigheten är ostörd av mätningen.

Fig. 8.1 visar en metod att mäta det statiska trycket. Den använda anordningen är en s.k. piezometeröppning.

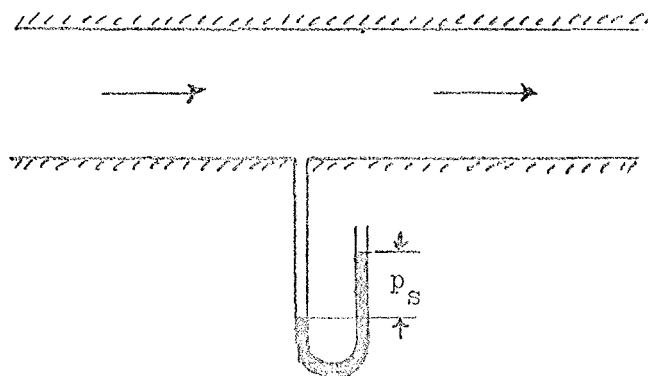


Fig. 8.1. Piezometeröppning för mätning av statiskt tryck.

Eftersom strömningen enligt figuren är parallell varierar trycket hydrostatiskt vinkelrätt mot strömlinjerna. Genom att mäta trycket vid väggen kan då trycket i en godtycklig punkt av tvärsektionen bestämmas.

Piezometeröppningen skall vara liten och riktad vinkelrätt genom rörväggen.

Små riktningsfel hos, och skrovlighet kring, piezometeröppningen kan förorsaka påtagliga fel i mätningarna, varför det är rådligt att använda flera piezometeröppningar sammansatta till en piezometerring.

Vid skrovliga rörväggar används ett piezometerör (fig. 8.2).

Piezometerörret består av ett rör riktat uppströms med rörändan tillsluten. Det har radiella hål i den cylindriska del, som är riktad nerströms från den tilltäppta mynningen.

Mätanordningen är relativt okänslig då värdet på Reynolds tal ligger

under ett. Dess inpassning i strömriktningen behöver ej göras perfekt. Vid en avvikelse på 15° kan man förvänta sig ett fel på några få procent.

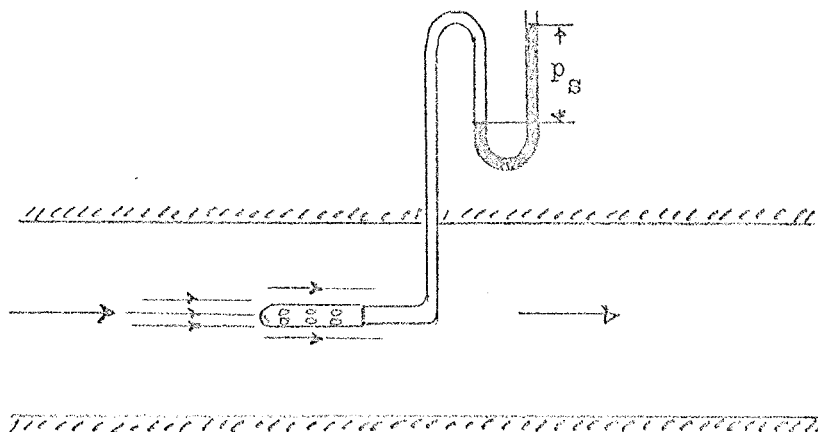


Fig. 8.2 Piezometerrör för mätning av statiskt tryck.

8.2 Hastighetsmätningar

Eftersom bestämningen av strömningshastigheten i ett antal punkter i en tvärsektion möjliggör utvärderingen av avbördningen, blir mätning av strömningshastigheten ofta mycket betydelsefull.

Normalt används härför en anordning, vilken ej mäter hastigheten direkt utan ger ett mätvärde, som kan relateras till hastigheten.

Pitotröret verkar efter denna princip. Det möjliggör en mycket exakt mätning av strömningshastigheter.

Fig. 8.3 visar ett enkelt pitotrör för mätning av hastigheten v i en öppen kanal. Röröppningen är riktad uppströms, så att vattnet strömmar in genom öppningen. Inströmningen pågår till dess att ett mottryck hunnit bildas inne i röret, tillräckligt stort för att uppväga det av hastigheten åstadkomna trycket. Alldeles framför öppningen är vattnet i vila.

Strömlinjen genom punkt (1) leder till punkt (2), benämnd stagnationspunkten, där vattnet i vila uppdelas och passerar runt röret. Trycket vid (2) får vi från vattenpelaren inne i röret. Bernoullis ekvation, tillämpad mellan punkterna (1) och (2), ger

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho} + 0 = 0 + \frac{p_2}{\rho} + 0 = h_0 + \Delta h$$

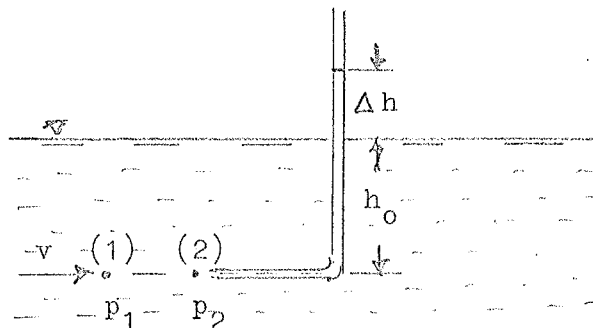


Fig. 8.3. Enkelt pitotrör.

Eftersom $p_1/\rho g = h_0$ reduceras ekvationen till

$$\frac{v^2}{2g} = \Delta h \quad 8.2.1$$

eller

$$v = \sqrt{2g \Delta h} \quad 8.2.2$$

Praktiskt är det mycket svårt att avläsa Δh från en fri vattenyta.

Pitotröret anger stagnationstrycket, som också benämnes totala trycket. Det totala trycket är sammansatt av två delar, det statiska trycket h_0 och det dynamiska trycket Δh (fig. 8.3). Sambandet mellan det dynamiska trycket och hastighetshöjden framgår av ekv. 8.2.1.

Genom att kombinera mätning av det statiska trycket med mätning av det totala trycket fås det dynamiska trycket (fig. 8.4).

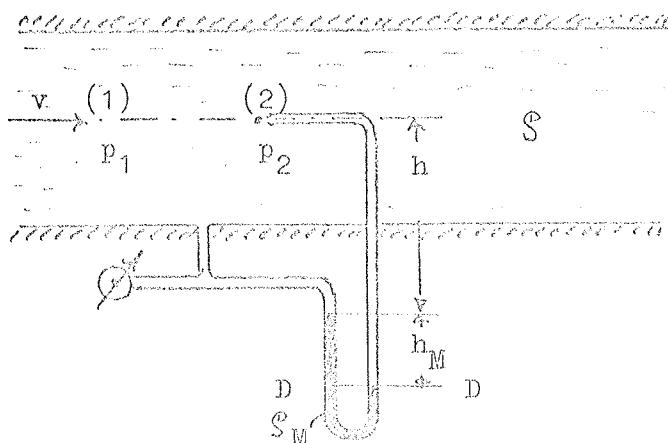


Fig. 8.4. Kombination av pitotrör och piezometeröppning för mätning av strömningshastigheter.

Bernoullis ekvation ger för punkterna (1) och (2) i figur 8.4

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} \quad 8.2.3$$

Ekvationen för trycket i manometern, i m vattenpelare, blir för referensnivå vid D

$$p_2 + \rho g(h + h_M) = p_1 + \rho g h + \rho_M g h_M$$

eller

$$p_2 - p_1 = \rho_M g h_M - \rho g h_M$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = h_M \left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1 \right) \quad 8.2.4$$

Substitution av $(p_2 - p_1)/\rho g$ i ekv. 8.2.3 ger

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = h_M \left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1 \right)$$

Vi löser ut v och får

$$v = \sqrt{2g h_M \left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1 \right)} \quad 8.2.5$$

Pitotröret är också relativt okänsligt för strömningsriktningen; ett fel på bara några få procent uppkommer om röret är felriktat mindre än 15° .

Piezometerröret och Pitotröret kan kombineras till ett instrument, Pitot-piezometerröret (fig. 8.5).

En analys, genomförd på samma sätt som den föregående med fig. 8.4 som underlag, visar att samma relationer gäller. Ekv. 8.2.5 ger ett uttryck för hastigheten, men på grund av osäkerheten i mätningen av det statiska trycket måste en korrektionsfaktor införas

$$v = C \sqrt{2g h_M \left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1 \right)} \quad 8.2.6$$

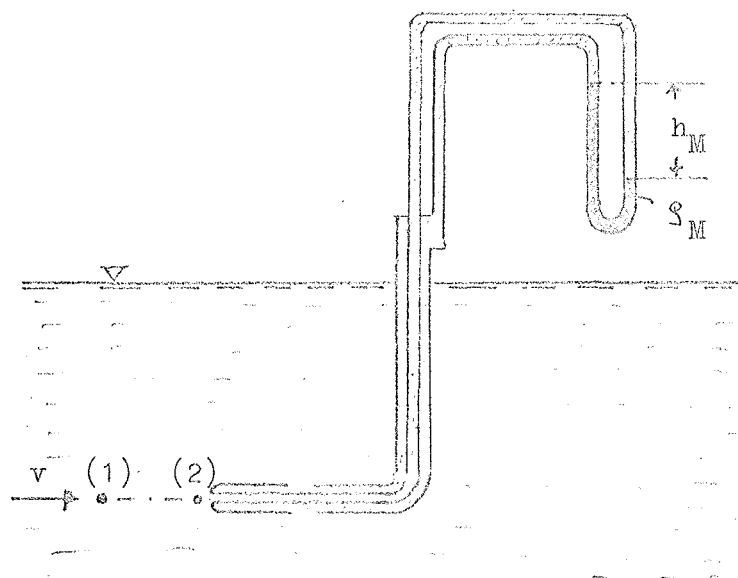


Fig. 8.5. Pitot-piezometerrör.

En särskild form av pitot-piezometerrör med en tvär nos, Prandtls rör, är så konstruerat att störningarna - å ena sidan på grund av nosen, å andra sidan på grund av rörsidorna - tar ut varandra, varvid C blir lika med ett i ekvationen ovan. För andra pitot-piezometerrör måste konstanten C bestämmas genom kalibrering.

8.3 Flödesmätningar

Utströmning ur en behållare vid konstant tryckhöjd

En utströmningsöppning kan användas för att mäta flödet ut ur en behållare (fig. 8.6) eller ett rör. Den del av strömningen, som försiggår längs väggen kan inte göra en rätvinklig vändning vid öppningen, utan behåller en radiell hastighetskomponent, som reducerar strålningsarean. Tvärsnittet, där kontraktionen är störst, kallas "vena contracta". Strömlinjerna är parallella tvärs genom strålen i denna sektion och trycket är oftast atmosfäriskt inne i strålen.

Eftersom i fig. 8.6 h antas konstant blir $v_0 = 0$ i punkt (1). Trycket förutsättes vara lika med atmosfärstrycket p_0 i både punkt (1) och punkt (2). Tillämpning av Bernoullis ekvation utan förlustterm ger då för en referensnivå genom punkt (2)

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + 0$$

eller

$$v = \sqrt{2g h}$$

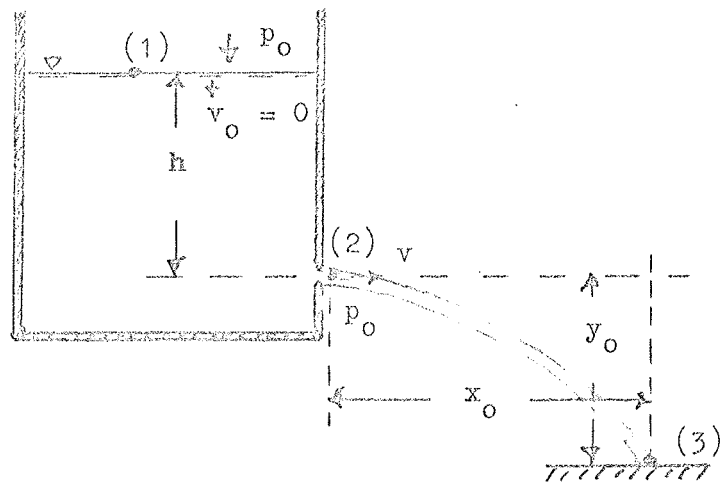


Fig. 8.6. Utströmning ur en behållare.

Detta är Toricellis lag, härledd i del 1 sid. 105-107.

Ekv. 8.3.1 anger endast den teoretiska hastigheten, eftersom vi ej tagit hänsyn till förlusterna mellan punkterna (1) och (2). Kvoten mellan den verkliga hastigheten v_v och den teoretiska v kallas hastighetskoefficienten α , dvs.

$$\alpha = \frac{v_v}{v} \quad 8.3.2$$

Då fås enligt ekv. 8.3.1 att

$$v_v = \alpha \sqrt{2g h} \quad 8.3.3$$

Den verkliga avbördningen genom utloppsöppningen är produkten av den verkliga hastigheten vid "vena contracta" och strålens tvärsnittsarea. Kvoten mellan genomskärningsarean A_v vid "vena contracta" och utströmningsöppningens area A ger en annan koefficient benämnd kontraktionskoefficienten β

$$\beta = \frac{A_v}{A} \quad 8.3.4$$

Arean vid "vena contracta" är βA . Den verkliga avbördningen blir då

$$q = \alpha \cdot \beta \cdot A \sqrt{2g h} \quad 8.3.5$$

Det är brukligt att kombinera de två koefficienterna till en avrinningskoefficient μ .

$$\mu = \alpha \cdot \beta \quad 8.3.6$$

varifrån fås flödet

$$q = \mu A \sqrt{2g h} \quad 8.3.7$$

Både α och β måste bestämmas experimentellt. Storleken av dem är framförallt beroende av utloppsöppningens form, men i viss mån också av h .

α varierar inom gränserna 0,95-0,99, β mellan 0,61-0,65.

Hastighetsreduktionen är minst då utströmningen sker skarpkantat.

Förluster vid utströmning från en behållare

Tryckförlusten vid strömning genom en utloppsöppning fås ur Bernoullis ekv. med förlustterm. Vi tillämpar den på avståndet mellan punkterna (1) och (2) i fig. 8.6 och får

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + h = \frac{v_v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + 0 + h_f$$

eller

$$h_f = h - \frac{v_v^2}{2g} = h(1 - \alpha^2) = \frac{v_v^2}{2g} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \quad 8.3.8$$

där ekv. 8.3.3 har använts för att erhålla förlusterna h_f i termer av H och α eller v_v och α .

Exempel 8.1. En utströmningsöppning 7,5 cm i diameter under en tryckhöjd av 4,8 m avbördar 850 l vatten på 32 sek. Strålens avböjning bestämdes genom uppmätning av x_0 (se fig. 8.6) till 4,7 m vid en fallhöjd y_0 av 1,2 m. Bestäm α , β och μ , samt effektförlusten i hk.

Lösning: Den teoretiska hastigheten v är

$$v = \sqrt{2g h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,8} = 9,7 \text{ m/sek}$$

Den verkliga hastigheten bestäms ur strålens avböjning. Tiden, som åtgår för att fall 1,2 m är

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,2}{9,81}} = 0,494 \text{ sek}$$

och den verkliga hastigheten uttrycks genom

$$x_0 = v_v t \quad v_v = \frac{4,7}{0,494} = 9,5 \text{ m/sek}$$

Då är

$$\alpha = \frac{v_v}{v} = \frac{9,5}{9,7} = 0,98$$

Ur ekv. 8.3.7 fås

$$u = \frac{q}{A \sqrt{2g h \cdot 32}} = \frac{850 \cdot 4}{\pi \cdot 7,5^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,8 \cdot 32}} =$$

$$= \frac{3400}{\pi \cdot 7,5^2 \cdot 9,7 \cdot 32} = 0,620$$

Då ger ekv. 8.3.6

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{0,62}{0,98} = 0,632$$

Tryckförlusten i m v.p. blir enligt ekv. 8.3.6

$$h_f = 4,8(1 - 0,98^2) = 4,8 \cdot 0,04 = 0,19 \text{ m v.p.}$$

Effektförlusten i hk är då

$$P_f = S g q h W = \frac{S g q h}{1000} \text{ kW} = \frac{1,36 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,85 \cdot 0,19}{1000 \cdot 32} =$$

$$= 0,067 \text{ hk} = 0,07 \text{ hk}$$

Utströmning ur en behållare vid variabel tryckhöjd

Ett fall av icke stationär strömning, som har praktisk betydelse, föreligger, när man vill bestämma den tid det tar att sänka vattenytan i en reservoar en given höjd. Teoretiskt är Bernoullis ekvation tillämpbar endast på stationär strömning, men sänks vätskeytan långsamt kan det uppkomna felet försummas.

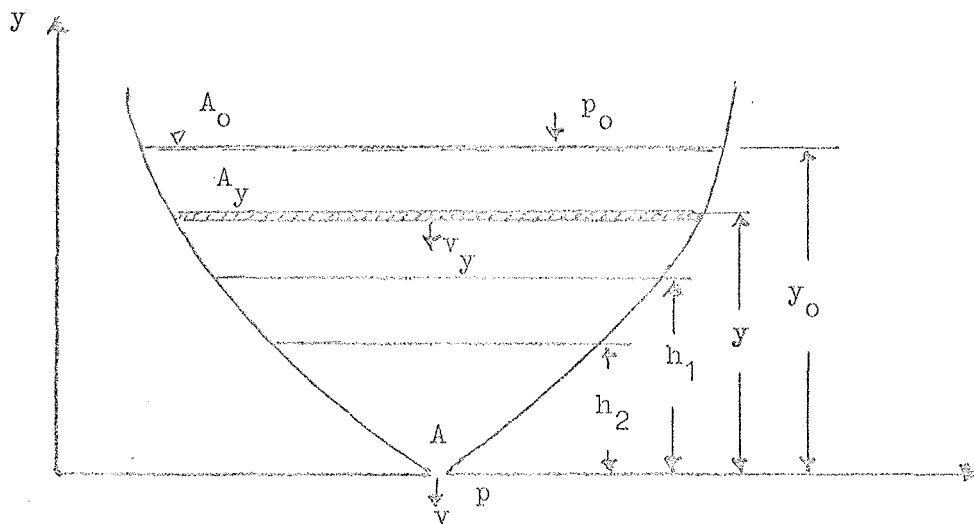


Fig. 8.7. Utströmning ur behållare vid variabel tryckhöjd.

Fig. 8.7 föreställer ett kärl med godtycklig form, fyllt med en vätska, vars fria yta A_0 ursprungligen ligger på höjden y_0 över utloppsöppningen A . Ingen vätska rinner till kärlet. Efter någon tid har vätskan sjunkit till den godtyckliga höjden y över utloppsöppningen.

Bernoullis ekv. ger

$$\frac{v_y^2}{2g} + \frac{p_y}{\rho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + 0$$

Om, som ofta är fallet, $p_y = p_0 = \text{atmosfärstryck}$, övergår ekv. till

$$\frac{v_y^2}{2g} + y = \frac{v^2}{2g}$$

Enligt kontinuitetsekvationen är

$$v_y \cdot A_y = v \cdot A \quad \text{eller} \quad v_y = v \cdot \frac{A}{A_y}$$

Insättning i ekvationen ovan ger

$$\frac{v^2}{2g} \left(\frac{A}{A_y} \right)^2 + y = \frac{v^2}{2g} \quad \text{eller} \quad \frac{v^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A}{A_y} \right)^2 \right] = y \quad \text{varav fås}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gy}{1 - \left(\frac{A}{A_y} \right)^2}}$$

På tiden dt sjunker vätskeytan från y till $y - dy$, varvid vätskemängden $dQ = - A_y dy$ utströmmar. Detta kan också tecknas

$$dQ = \mu \cdot A \cdot v \cdot dt$$

dvs. efter insättning av värdet på v

$$\mu A \sqrt{\frac{2g y}{1 - \left(\frac{A}{A_y}\right)^2}} dt = - A_y dy$$

$$dt = - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{A_y}{A} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A}{A_y}\right)^2}{2g y}} dy$$

För att sänka vattenytan från höjden h_1 till höjden h_2 över kärlets botten åtgår tiden

$$t = - \frac{1}{\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} A_y \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A}{A_y}\right)^2}{y}} dy$$

Är utströmningsöppningens area A liten i förhållande till A_y kan termen $(A/A_y)^2$ försummas och uttrycket ovan får då formen

$$t = - \frac{1}{\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{A_y}{\sqrt{y}} dy \quad 8.3.9$$

Då man i allmänhet har att göra med kärl av regelbunden form, kan man få fram enkla samband mellan y och A_y . Ofta är sektionsarean konstant A_0 . Ekvationen kan då skrivas

$$t = - \frac{A_0}{\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

Vi integrerar, efter omkastning av integrationsgränserna. Då fås

$$t = \frac{A_0}{\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{A_0}{\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{h_2}^{h_1}$$

Till slut

$$t = \frac{2 A_0}{\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \quad 8.3.10$$

Exempel 8.2. En behållare med vätska har en horisontell tvärsektionsarea av 2 m^2 i nivå med utloppsöppningen. Tvärsektionsarean varierar lineärt med höjden, så att den är 1 m^2 vid en tvärsektion 3 m ovanför öppningen. Om utströmningsöppningen är 10 cm i diameter och $\mu = 0,65$, beräkna tiden i sekunder, som åtgår för att sänka vätskeytan från $2,4 \text{ m}$ till $1,2 \text{ m}$ ovan utloppsöppningen.

Lösning: Insättning i ekv. 8.3.9 där A_y får värdet $(2 - y) \text{ m}^2$ ger

$$\begin{aligned} t &= - \frac{1}{0,65 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \int_{2,4}^{1,2} \frac{2 - y}{\sqrt{y}} dy = \\ &= - 44,23 \int_{2,4}^{1,2} (2 - y) y^{-\frac{1}{2}} dy = - 88,46 \int_{2,4}^{1,2} y^{-\frac{1}{2}} dy + 44,23 \int_{2,4}^{1,2} y^{\frac{1}{2}} dy = \\ &= 80,28 - 70,84 = 9,44 \text{ sek} \end{aligned}$$

Venturiröret

För mätning av i rörledningar framströmmande vätskemängder använder man sig ofta av det s.k. venturiröret (fig. 8.8).

Det består av ett i rörledningen inbyggt koniskt rör med följande delar; en uppströmssektion av samma storlek som ledningen med en piezometer-ring för mätning av statiska trycket; en konvergerande konisk sektion; en cylindrisk förträngning med ytterligare en piezometerring; och en gradvis divergerande konisk sektion, som till slut får ledningens dimension. En differential manometer förbinder de båda piezometerringarna.

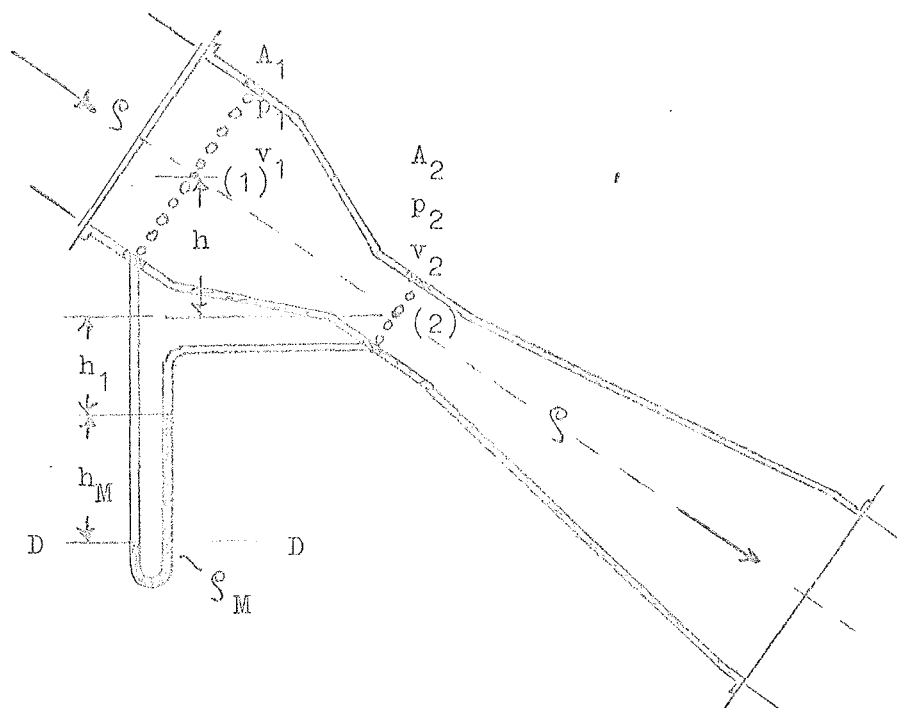


Fig. 8.8. Venturirör.

För att korrekta mätresultat skall erhållas fordras att venturiröret skall föregås av åtminstone 10 diameters längd av rak ledning. Vid strömningen från rörledningen in i förträngningen ökas hastigheten kraftigt med korresponderande minskning i trycket. Avbördningen vid inkompressibel strömning visar sig vara en funktion av manometeravläsningen.

De uppmätta trycken vid uppströmssektionen och förträngningen är verkliga tryck medan hastigheterna från Bernoullis ekvation utan förlustterm är teoretiska hastigheter. När förluster diskuteras med hjälp av energiekvationen gäller det verkliga hastigheter.

Först fås den teoretiska hastigheten i förträngningen med hjälp av Bernoullis ekvation utan förlustterm. Den verkliga hastigheten erhålles sedan genom att multiplicera den teoretiskt funna med hastighetskoefficienten α . Avbördningens storlek fås därefter genom multiplikation av den verkliga hastigheten och förträngningens reella area. Fig. 8.8 ger

$$\frac{v_{1t}^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h = \frac{v_{2t}^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} \quad 8.3.11$$

med höjden i punkt (2) som referensnivå. v_1 och v_2 förutsättes vara medelhastigheterna vid sektion (1) och (2) respektive, varför α_1 och α_2 kan antas bli ett.

Kontinuitetsekvationen ger

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad \text{eller} \quad v_1 \cdot d_1^2 = v_2 \cdot d_2^2$$

där d_1 och d_2 är diametrarna i punkt (1) och (2) respektive. Då fås

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \quad 8.3.12$$

Vi löser ekv. 8.3.11 med avseende på v_{2t}

$$\frac{v_{2t}^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right] = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + h$$

och

$$v_{2t} = \sqrt{\frac{2g}{1 - (d_2/d_1)^4} \left(h + (p_1 - p_2)/\rho g \right)} \quad 8.3.13$$

Genom införande av hastighetskoefficienten α , $v_{2v} = \alpha v_{2t}$

$$v_{2v} = \alpha \sqrt{\frac{2g}{1 - (d_2/d_1)^4} \left(h + (p_1 - p_2)/\rho g \right)} \quad 8.3.14$$

Efter multiplikation med A_2 fås den reella avbördningen q , eller

$$q = \alpha \cdot A_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - (d_2/d_1)^4} \left(h + (p_1 - p_2)/\rho g \right)} \quad 8.3.15$$

Manometerskillnaden h_M kan nu relateras till tryckdifferensen. Om ρ är vätskans och ρ_M manometervätskans densitet respektive, fås för en referensnivå vid D

$$p_1 + \rho g(h + h_1) + \rho g h_M = p_2 + \rho g h_1 + \rho_M g h_M$$

Efter förenkling

$$p_1 - p_2 + \rho g h = g h_M (\rho_M - \rho)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + h = h_M \left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1 \right) \quad 8.3.16$$

Substitution i ekv. 8.3.15 ger

$$q = \alpha \cdot A_2 \sqrt{\frac{2 \rho h_M \left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1 \right)}{1 - (d_2/d_1)^4}} \quad 8.3.17$$

som är venturirörets ekvation vid inkompressibel strömning.

Kontraktionskoefficienten är ett, varför $\alpha = 1$.

Det bör noteras, att h föll bort ur ekvationen. Avbördningen är beroende av mätskillnaden h_M oavsett venturirörets orientering. Ekvationen är giltig vare sig måtanordningen är horisontell, vertikal eller lutande.

α bestäms genom kalibrering, dvs. mätning av avbördningen och tryckskillnaden och lösning med avseende på α , som vanligen avsättes mot Reynolds tal. Där det är möjligt skall ett venturirör väljas så, att dess koefficient är konstant över det område av Reynolds tal inom vilket den skall användas.

Venturimetern medför små strömningsförluster, beroende på den gradvis expanderande koniska sektionen, vars form underlättar återförandet av den uppkomna höga rörelseenergien till tryckenergi. Förlusterna uppgår till omkring 10 till 15 procent av tryckförändringen mellan sektion (1) och (2).

Genomströmningsöppning i ett rör

Den fyrkantiga öppningen i röret i fig. 8.9 förorsakar en sammandragning av strålen nedströms öppningen.

För inkompressibel strömning blir Bernoullis ekvation, tillämpad mellan sektion (1) till strålen vid dess "vena contracta", sektion (2)

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + 0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + 0$$

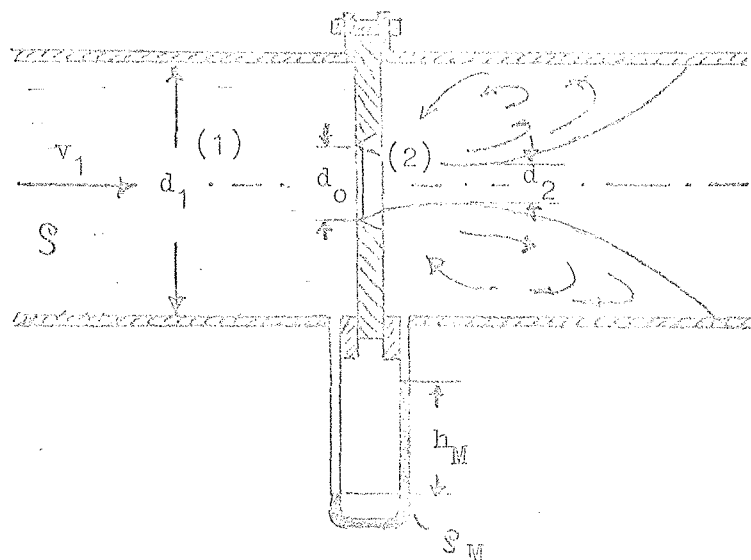


Fig. 8.9. Genomströmningsöppning i ett rör.

Kontinuitetsekvationen ger sambandet mellan hastigheterna v_{1t} och v_{2t} och kontraktionskoefficienten $\beta = A_2/A_0$

$$v_1 \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = v_2 \beta \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \quad 8.3.18$$

Efter eliminering av v_{1t} i Bernoullis ekvation fås

$$\frac{v_{2t}^2}{2g} \left[1 - \beta^2 \left(\frac{d_0}{d_1} \right)^4 \right] = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

Lösning av ekvationen med avseende på v_{2t} ger

$$v_{2t} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - \beta^2 (d_0/d_1)^4}}$$

Genom multiplicering med α för att erhålla den verkliga hastigheten vid "vena contracta" erhålles

$$v_{2v} = \alpha \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - \beta^2 (d_0/d_1)^4}}$$

Multiplikering med strålens area, βA_0 , ger den reella avbördningen q , eller

$$q = \mu A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/S}{1 - \beta^2 (d_0/d_1)^4}} \quad 8.3.19$$

där $\mu = \alpha \cdot \beta$

I termer av mätningsskillnaden h_M blir ekv. 8.3.19

$$q = \mu A_0 \sqrt{\frac{2 g h_M \left(\frac{S_M}{S} - 1 \right)}{1 - \beta^2 (d_0/d_1)^4}} \quad 8.3.20$$

På grund av svårigheten att bestämma de två koefficienterna separat används vanligen en förenklad formel

$$q = C A_0 \sqrt{2 g h_M \left(\frac{S_M}{S} - 1 \right)} \quad 8.3.21$$

där

$$C = \frac{\alpha}{1 - (d_2/d_1)^4} \quad 8.3.22$$

Rörknämutare

Rörknämutare vid inkompressibel strömning är en av de enklaste anordningarna för flödesmätningar. Den består av piezometeröppningar på in- och utsidan av ett rörknä förbundna genom en differentialmanometer. På grund av centrifugalkraften i knäet uppkommer en tryckdifferens, som blir proportionell mot den framrinnande vattenmängden.

En rak sträcka skall föregå knäet och för erhållande av riktiga resultat bör mätaren kalibreras på mätstället. Efter en kalibrering är mätresultaten lika tillförlitliga som de, vilka ernåtts med hjälp av venturirör.

Utströmning genom större öppning. Överfall

Den i det föregående diskuterade strömningshastigheten har gällt sådana fall där utloppsöppningens area varit så liten, att man kunnat sätta has-

tigheten konstant över hela utströmningsarean.

I det följande göres beräkningar av flödet med utgångspunkt från att strömningshastigheten varierar från punkt till punkt av utloppsöppningens area.

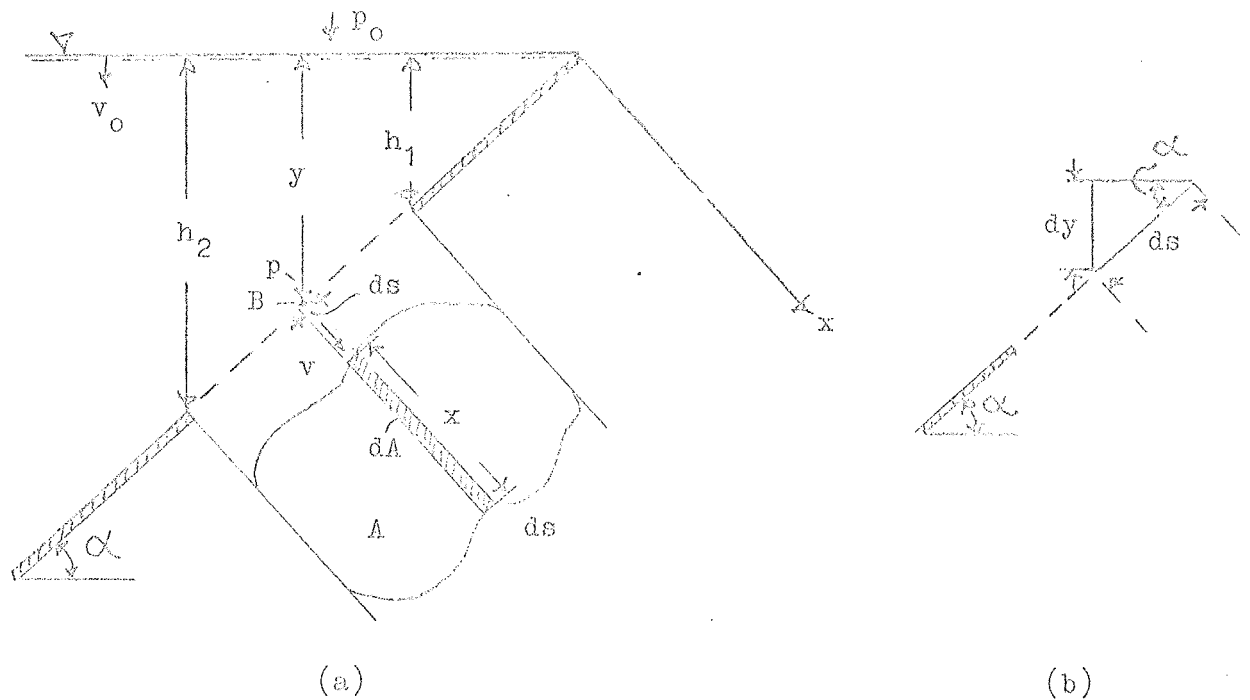


Fig. 8.10. Utströmning genom större öppning.

I fig. 8.10a gäller enligt Bernoullis ekvation för ett referensplan genom B

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\rho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$$

eller

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2g \left(y + \frac{p_o - p}{\rho g} \right)}$$

Tas hänsyn till uppkomna strömningsförluster kan vi skriva

$$v_v = \alpha \sqrt{v_o^2 + 2g \left(y + \frac{p_o - p}{\rho g} \right)}$$

För strömningssytan har vi att $A_v = \beta \cdot A$ och $dA_v = \beta dA$. Dessutom är $\alpha \cdot \beta = \mu$. Flödet q blir då

$$dq = v_v \cdot dA_v = \alpha \cdot \sqrt{v_o^2 + 2g \left(y + \frac{p_o - p}{\rho g}\right)} \cdot dA =$$

$$= \mu \sqrt{v_o^2 + 2g \left(y + \frac{p_o - p}{\rho g}\right)} dA$$

Ur fig. 8.10b får vi att $dA = x ds = x \frac{dy}{\sin \alpha}$.

Vi substituerar dA i uttrycket för flödet med $x dy/\sin \alpha$ och integrerar mellan h_1 och h_2 , varvid erhålles

$$q = \frac{\mu}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} x \sqrt{v_o^2 + 2g \left(y + \frac{p_o - p}{\rho g}\right)} dy \quad 8.3.23$$

För lösning av denna integral måste x kunna uttryckas som en funktion av y , $x = f(y)$.

I många fall kan p_o sättas lika med p och $\alpha = 90^\circ$. Då fås

$$q = \mu \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{v_o^2 + 2g y} f(y) dy \quad 8.3.24$$

Fri utströmning genom vertikal, rektangulär öppning

Se fig. 8.11. Vi använder ekv. 8.3.24 där $f(y) = b$ och får

$$q = \mu b \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{v_o^2 + 2g y} dy$$

eller

$$q = \mu b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{\frac{v_o^2}{2g} + y} dy$$

Vi integrerar och erhåller

$$q = \mu b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{v_0^2}{2g} + y \right)^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(\frac{v_0^2}{2g} + h_2 \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_0^2}{2g} + h_1 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad 8.3.25$$

Ofta kan v_0 försummas. Värdet på v_0 är i de flesta fall litet i förhållan de till h_1 och h_2 . Då fås

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right) \quad 8.3.26$$

För skarpkantad öppning i en tunn vägg anges värdet på μ till 0,60.

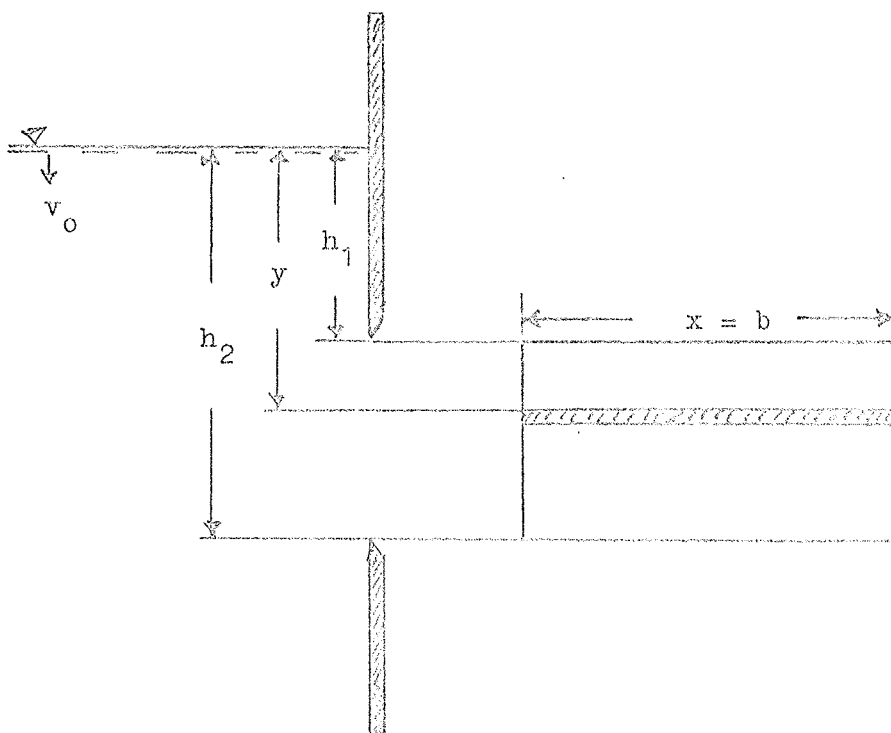


Fig. 8.11. Fri utströmning genom vertikal rektangulär öppning.

Täckt utströmning genom vertikal öppning

Sker utströmning under vatskeytan blir den verkliga vattenhastigheten v_v lika med $\propto \sqrt{2g (h_1 - h_2)}$ (se ekv. 4.9.9 del 1 sid. 107) och avbördningen skrives

$$q = \mu A \sqrt{2g h} \quad 8.3.27$$

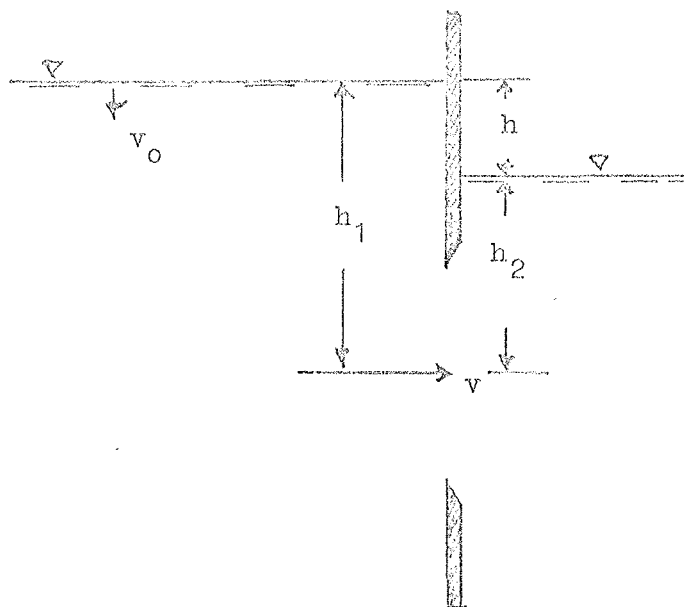


Fig. 8.12. Täckt utströmning genom vertikal öppning.

Värdet på μ kan här sättas till 0,59.

Skarpkantat fritt överfall

Om h_1 i ekv. 8.3.25 är noll fås Weisbachs formel. Sättes sedan $v_0 = 0$ fås Polenis formel för det rektangulära fria överfallet

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}} \quad 8.3.28$$

Strömningen antas ske enligt fig. 8.13 nedan.

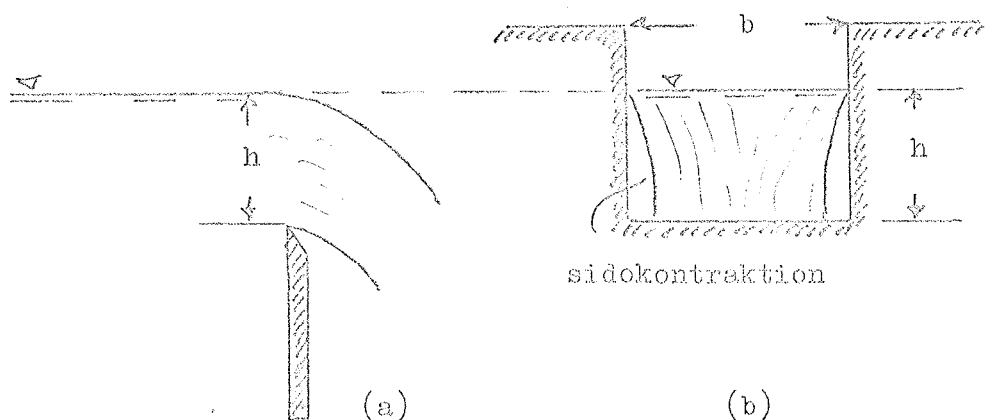


Fig. 8.13. Skarpkantat fritt överfall.

Utlöpsoppningen saknar övre begränsning, varför man har infört benämningen fritt överfall.

Har luften fritt tillträde under strålen säges den vara luftad.

Vid härledningen av de i det föregående diskuterade formlerna har man utgått ifrån, att alla vätskepartiklar passerar vinkelrätt mot ett vertikalsnitt (a - a i fig. 8.14). Fig. 8.14 visar en skiss av den verkliga strömningsbilden.

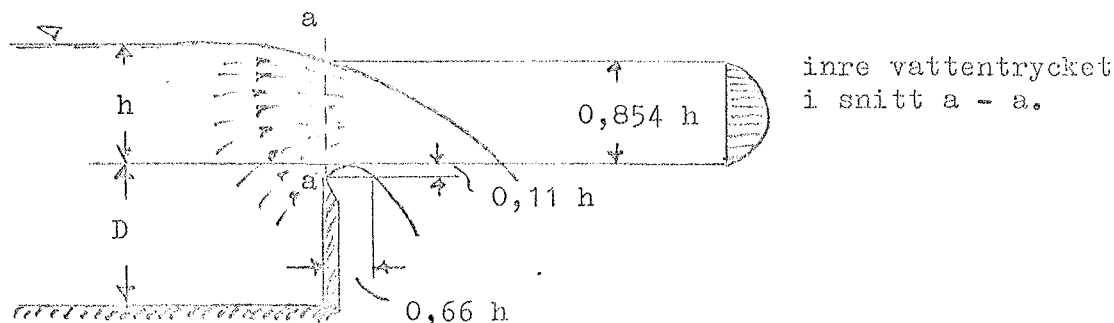


Fig. 8.14. Skiss av verklig strömningsbild vid skarpkantat fritt överfall

Som framgår av fig. 8.14 konvergerar strömlinjerna starkt mot snittet a - a.

På grund av strömrörens krökning vid kontraktionen och härav betingad centrifugalkraft råder inuti strålen ett högre tryck än atmosfärstrycket omkring den luftade strålen. På grund härav blir den verkliga hastigheten mindre än det värde, som antagits vid härledningen av formlerna.

Dessa är användbara först när man valt ett riktigt värde på utströmningskoefficienten μ .

För avbördningen över ett skarpkantat horisontellt överfall, inbyggt i en ränna, med vertikala väggar och med samma bredd som rännan, varigenom strålen ej utsätts för sidokontraktion (se fig. 8.13b) gäller för luftad stråle den av Rehbock genom experiment funna formeln

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h_e^{\frac{3}{2}} \quad 8.3.29$$

där enligt fig. 8.14 $h_e = h + 0,0011$ m och D är överfallströskelns höjd över botten. För μ fann Rehbock relationen $\mu = 0,6035 + 0,0813 h_e/D$.

För $h_e/D = 0$ blir $\mu = 0,60$, för $h_e/D = 0,5$ 0,64, för $h_e/D = 1$ 0,68.

Skillnaden mellan den beräknade och uppmätta avbördningen uppskattas av Rehbock till högst 0,2 % om $h_e/D < 2$. Vid större värden gäller inte formeln.

Är strålen icke luftad uppkommer bakom strålen ett luftförtunnat rum med virvlande vatten.

Härav uppstår en sugverkan, som medför en ändring av strålformen, minskning av trycket inuti strålen och en ökning av avbördningen.

Vid en mot dammens nedströmssida helt anliggande stråle kan μ växa från det angivna värdet 0,65 för helt luftad stråle till värdet 0,80.

Sidokontraktion

De nu härledda avbördningsformlerna med tillhörande μ -värden gäller under förutsättning, att överfallet har samma bredd som tilloppsreännan eller att utskovets bredd är så stor, att sidorna icke inverkar.

Sidokontraktion uppkommer om överfallet har mindre bredd än tilloppet. Vattenföringen blir då mindre.

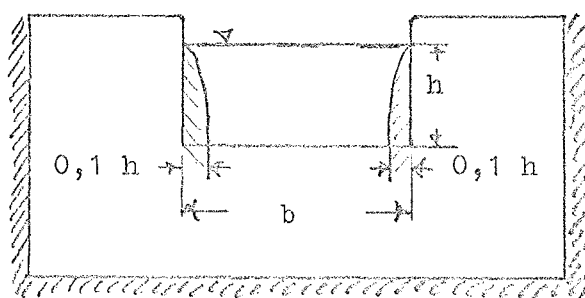


Fig. 8.15. Poncelets överfall med sidokontraktion.

Fig. 8.15 visar ett överfall med sidokontraktion, Poncelets överfall. Man ansätter här en empirisk korrektion för reduktionen av flödet genom att subtrahera $0,1 h$ från b för varje ändsammandragning.

Mätningar av små vattenmängder blir här osäkra.

Triangulärt fritt överfall

Ett överfall, som har god noggrannhet även vid små vattenmängder (< 20 l/sek) är det triangulära fria överfallet (fig. 8.16).

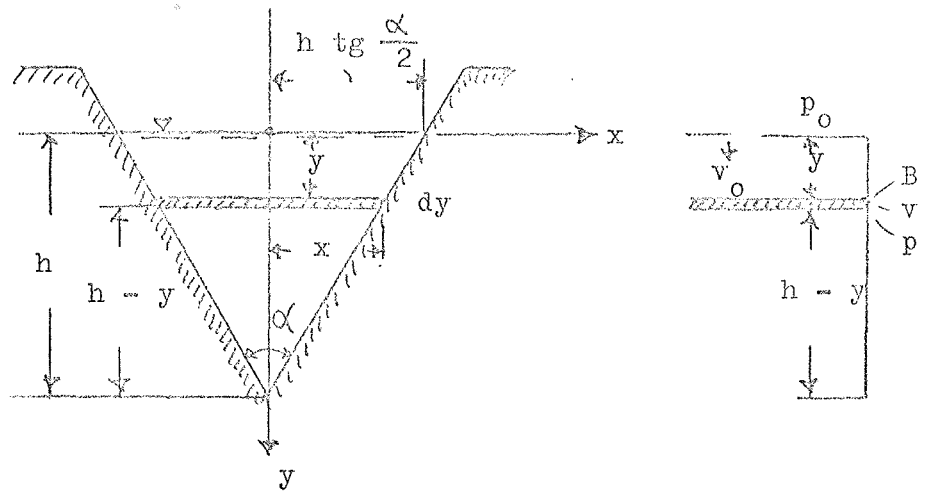


Fig. 8.16. Det triangulära fria överfallet.

Enligt Bernoullis ekvation gällande en ideal vätska kan vi skriva för ett referensplan genom punkt B

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$$

Då initialhastigheten v_0 i allmänhet är liten kan denna försummas. Likaså är ofta $p = p_0 =$ atmosfärstrycket. Då fås

$$v = \sqrt{2g y}$$

Vi har också om vi övergår till verkliga vätskor och inför utströmningskoefficienten μ , att

$$dq = \mu \cdot v \cdot dA = \mu \cdot v \cdot 2x \cdot dy = 2\mu x \sqrt{2g y} dy$$

Då $x = (h - y) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ fås

$$dq = 2\mu (h - y) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g y} dy$$

Vi integrerar från 0 till h

$$q = 2\mu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} \int_0^h (h - y) \sqrt{y} dy$$

Vi sätter uttrycket $2\mu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} = k$

$$q = k h \int_0^h \frac{1}{y^2} dy - k \int_0^h \frac{3}{y^2} dy$$

$$q = \frac{2}{3} k h^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} k h^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15} k h^{\frac{5}{2}}$$

Efter insättning av värdet på k fås till slut

$$q = \frac{8}{15} \mu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} h^{\frac{5}{2}} \quad 8.3.30$$

För $\alpha = 90^\circ$ erhålles

$$q = \frac{8}{15} \mu \sqrt{2g} h^{\frac{5}{2}} \quad 8.3.31$$

Det 90-gradiga överfallet går under benämningen Thomsons överfall.

Thomson har angivit μ till 0,62, Eck μ till 0,593.

Barr har empiriskt satt avbördningsformeln till $1,337 \cdot h^{2,48}$, vilket betyder att $\mu = 0,57$ à $0,58$.

Barrs formel torde enligt Reinius motsvara en mycket låg tilloppshastighet. Thomsons formel i sin tur en stor tilloppshastighet.

Tilloppsrännans bredd skall vara minst 8 gånger skibordshöjden h och dess djup under vinkelns spets $3h$ à $4h$.

Brett överfall

Fig. 8.17 visar en skiss av ett s.k. brett överfall.

Bernoullis ekvation tillämpad mellan punkterna (1) och (2) kan användas för att finna hastigheten v_2 vid höjden z . Försummas initialhastigheten v_1 fås för ett referensplan genom punkten B

$$0 + \frac{p_0}{\rho} + h - z = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + y - z$$

Lösning med avseende på v_2 ger

$$v_2 = \sqrt{2g(h - y)}$$

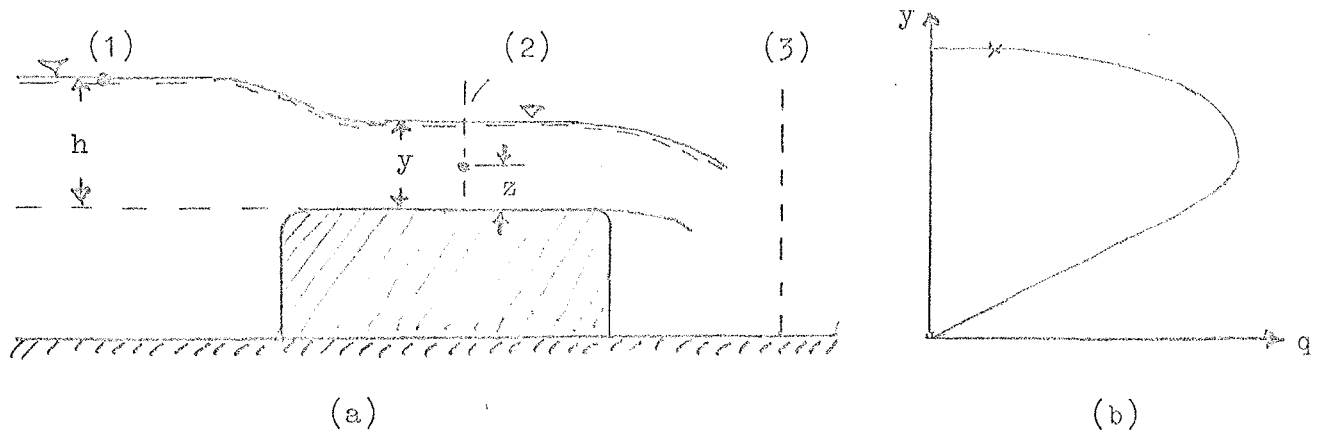


Fig. 8.17. Brett överfall.

För ett brett överfall med bredden b (vinkelrätt mot figurens plan) blir den teoretiska avbördningen

$$q = v_2 \cdot b \cdot y = b \cdot y \sqrt{2g(h - y)} \quad 8.3.32$$

En avsättning av q längs abscissan mot djupet y längs ordinatan för konstant h visas i fig. 8.17b. Det djup, som ger den maximala avbördningen fås genom följande resonemang.

En damm placerad i sektion (3) fig. 8.17a kommer att fullständigt hejda strömningen, när y blir lika med h . Om nu en svag strömning tillåts passera punkt (3) (vid konstant h) blir djupet y obetydligt mindre än h och avbördningen kommer exempelvis att ligga vid punkt a i fig. 8.17b. Vid ytterligare öppning av fördämningen i sektion (3) följer sambandet avrinning-djup den övre delen av kurvan till dess att maximala avbördningen är uppnådd.

Borttages nu dammen helt, visar det sig, att detta inte har någon som helst effekt på avrinningen. Strömningshastigheten vid sektion (2) blir nämligen då \sqrt{gy} , vilket är den hastighet en elementarvåg har i stillastående vätska vid djupet y . Varje ytterligare sänkning av vätskeytan nerströms kommer ej att kunna påverka värdet på y och avbördningen sker vid maximumvärdet.

Detta värde på y , kallat det kritiska djupet, kommer att ytterligare diskuteras i avsnittet 11.4.

Vi söker maximum för ekvationen 8.3.32 genom att sätta första derivatan lika med noll

$$\frac{dq}{dy} = b \sqrt{2g(h-y)} + b y \frac{1}{2} \frac{(-2g)}{\sqrt{2g(h-y)}} = 0$$

Lösning med avseende på y ger

$$2h - y = y$$

$$y = \frac{2h}{3} \quad 8.3.33$$

Insättning av värdet på h enl. ekv. ovan, $3y/2$, i uttrycket för hastigheten $v_2 = \sqrt{2g(h-y)}$ ger just

$$v_2 = \sqrt{gy} \quad 8.3.34$$

Viskositet och ytspänning har inverkan på överfallsavrinningskoefficienter. Därför bör ett överfall alltid kalibreras för den vätska var det skall användas.

8.4 Turbulensmätningar

Turbulens är något för en strömning karakteristiskt. Den påverkar kalibrering av mätinstrument och har avgörande betydelse för värmetransport, avdunstning, diffusion och en mängd andra fenomen förbundna med rörelsen hos en vätska eller en gas.

Turbulensen är i allmänhet specificerad genom två parametrar, storleken respektive intensiteten hos fluktuationerna.

Vid stationär strömning är den momentana medelhastighetens komponenter i en punkt konstanta. Om dessa medelvärden sättes till \bar{v}_x , \bar{v}_y , \bar{v}_z och hastighetskomponenterna i ett visst ögonblick är v_x , v_y , v_z är fluktuationerna givna genom v'_x , v'_y , v'_z i ekvationerna

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$

$$v_y = \bar{v}_y + v'_y$$

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

Kvadratroten ur kvadraten på medelvärdena av fluktuationerna (fig. 8.18) är ett mått på turbulensens intensitet. Dessa är $\sqrt{(\bar{v}'_x)^2}$, $\sqrt{(\bar{v}'_y)^2}$, $\sqrt{(\bar{v}'_z)^2}$.

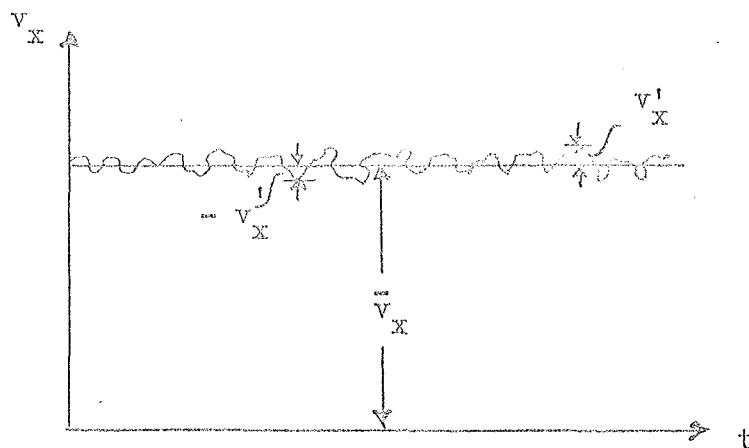


Fig. 8.18. Turbulenta fluktuationer i strömningsriktningen.

Fluktuationens storlek är ett genomsnittsmått på storleken hos virvlarna i strömningen. Placeras två hastighetsmättningsinstrument (glödtrådsmanometrar) i närheten av varandra är hastighetsfluktuationerna korrelerade, dvs. de tenderar att förändras samstämmigt. Ett åtskiljande av instrumenten medför en försvagning av korrelationen.

Avståndet mellan instrumenten, då korrelationen är noll, blir då ett användbart mått på fluktuationernas storlek.

8.5 Viskositetsmätningar

Viskositeten kan mätas på en rad olika sätt: (1) genom användning av Newtons viskositetslag; (2) genom utnyttjande av Hagen-Poiseuilles ekvation; (3) genom metoder, som fordrar kalibrering med vätskor eller gaser, vars viskositeter är kända.

Den dynamiska eller absoluta viskositeten kan beräknas genom uppmätning av hastighetsgradienten dv/dy och skjuvspänningen τ i Newtons viskositetslag (ekv. 1.1.1)

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad 8.5.1$$

Detta är den grundläggande metoden, eftersom den bestämmer alla andra parametrar i definitionsekvationen för viskositet.

Med hjälp av en cylinder, som roterar med en känd hastighet med avseende på en inre koncentrisk stationär cylinder, kan dv/dy bestämmas.

Genom uppmätning av vridmomentet på den stationära cylinderna bestäms så skjuvspänningen. Kvoten mellan skjuvspänningen och hastighetsförändringen uttrycker då viskositeten.

En schematisk bild av koncentrisk-cylinderviskosimeter återges i fig. 8.19.

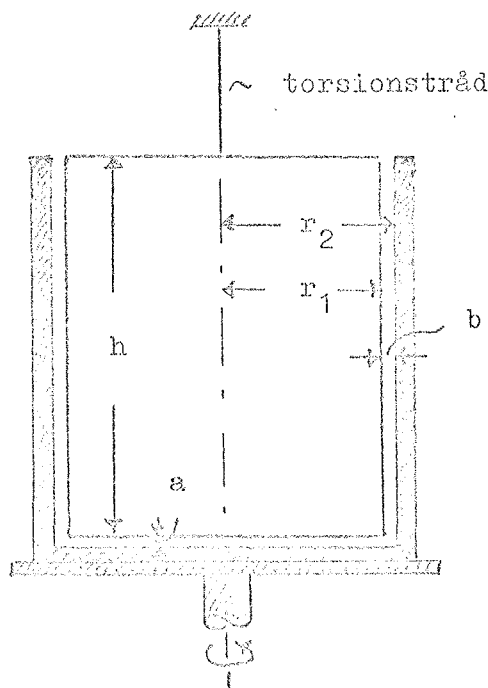


Fig. 8.19. Koncentrisk-cylinderviskosimeter.

Om rotationshastigheten är N rpm och radien är r_2 m blir vätske- eller gashastigheten vid den yttre cylinderns yta $2\pi r_2 N/60$ m/sek. Med skiljande avståndet b m (fig. 8.19) fås

$$\frac{dv}{dy} = \frac{2\pi r_2 N}{60b}$$

Ekvationen är baserad på att $b \ll r_2$. Vridmomentet T_c på den inre cylindern mätes med hjälp av den torsionstråd, vari cylindern är upphängd. Om vridmomentet, beroende på vätskan eller gasen under botten av den inre cylindern, negligeras fås skjuvspänningen till

$$\tau = \frac{T_c}{2\pi r_1^2 h}$$

Genom substitution i ekv. 8.5.1 och lösning med avseende på μ erhålles

$$\mu = \frac{15 T_c b}{\pi r_1^2 r_2 h N}$$

Mätningarna av alla parametrarna i Hagen-Poiseuilles ekvation undantagandes μ genom ett lämpligt experimentellt arrangement är en annan grundläggande metod för bestämning av viskositeten. En anordning enligt fig. 8.20 kan användas.

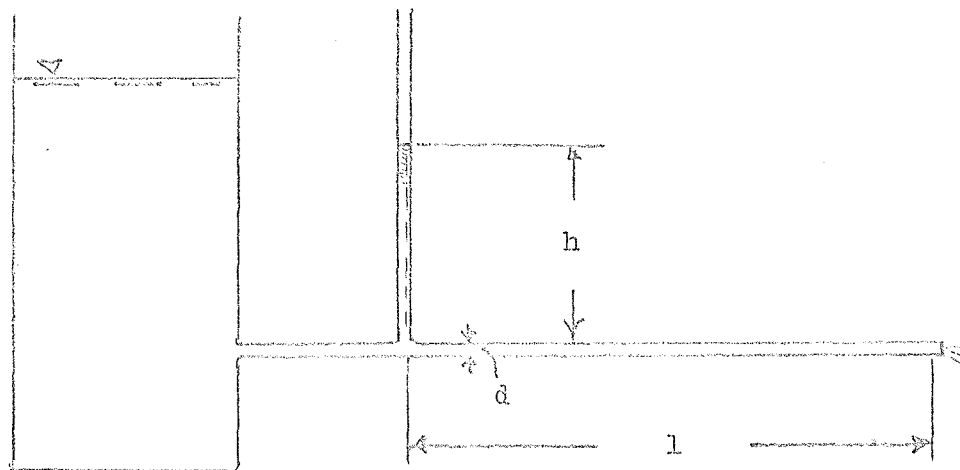


Fig. 8.20. Bestämning av viskositeten genom strömning i ett kapillärt rör

Då det krävs att vätskan får strömma en viss sträcka för att hinna utveckla sin karakteristiska hastighetsfördelning efter inträdet i röret, måste trycket på något sätt kunna bestämmas i en punkt längs röret. Volymen V av strömningen kan mätas över tiden t med vätskeytan på konstant nivå i behållaren. Detta ger q , och genom bestämning av S kan Δp beräknas. Med l och d kända fås från ekv. 6.2.7 del 1 sid. 167

$$\mu = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot r^4}{8 \cdot q \cdot l} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot d^4}{128 \cdot q \cdot l}$$

8.10.3

9. Pump- och hydroforanläggningar

9.1 För pumpanläggningar grundläggande begrepp och definitioner

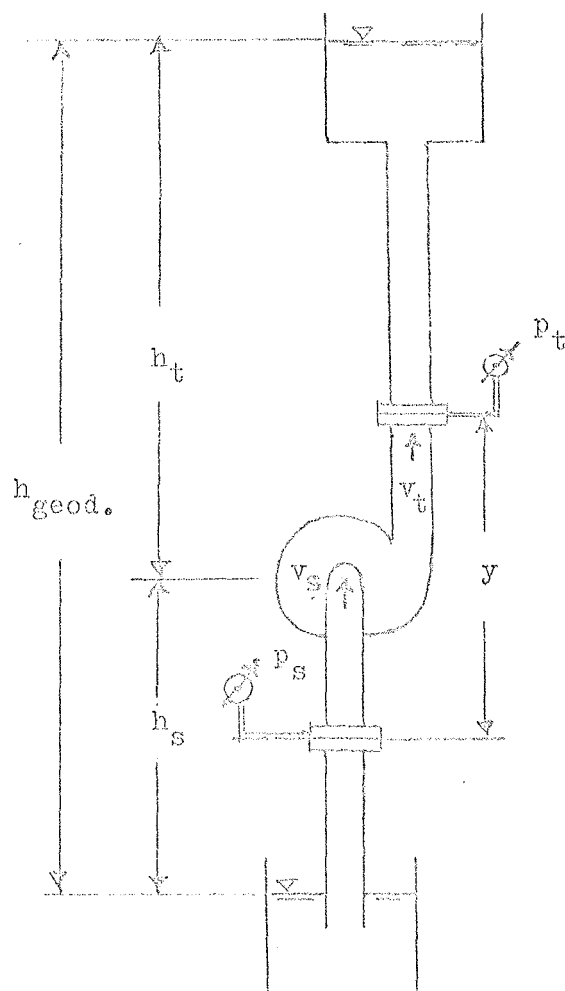


Fig. 9.1. Skiss över en pumpanläggning.

Följande begrepp gäller för pumpanläggningar i allmänhet (fig. 9.1).

h_s = statisk sughöjd = vertikala avståndet mellan den fria vattenytan och pumpens centrum

h_{fs} = summa tryckförluster i bottenventil och sugrör

H_v = $h_s + h_{fs}$ = vakuummetrisk sughöjd = summan av statisk sughöjd och tryckförluster i sugledningen

h_t = statisk tryckhöjd = vertikala höjdskillnaden mellan pumpens centrum och den högsta punkt vartill vattnet skall uppföras

h_{f_t} = summa tryckförluster i tryckledning och ventiler

$H_m = h_t + h_{f_t}$ = manometrisk tryckhöjd = summan av statisk tryckhöjd och tryckförluster i tryckledningen

$H = H_v + H_m$ = total manometrisk uppforderingshöjd = vakuummetrisk sughöjd + manometrisk tryckhöjd

Observera att pumpen skall dimensioneras för den totala manometriska uppforderingshöjden.

p_s = trycket i pumpens inlopp, dvs. på pumpens sug sida

p_t = trycket i pumpens utlopp, dvs. på pumpens trycksida

v_s = vattenhastigheten på sugsidan

v_t = vattenhastigheten på trycksidan.

För bestämning av en pumps manometriska uppforderingshöjd mätes trycken p_s och p_t . Detta göres med vakuummeter respektive manometer inkopplade vid pumpens sug- respektive trycksida (se fig. 9.1).

För ett referensplan genom sugflänsen kan vi med hjälp av Bernoullis ekvation uttrycka energien på pumpens trycksida

$$W_t = \frac{v_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho} + g y \quad (\text{J/kg})$$

För sugsidan fås

$$W_s = \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho} \quad (\text{J/kg})$$

Den för uppforderingen erforderliga energien kan sedan skrivas

$$W_t - W_s = \frac{v_t^2 - v_s^2}{2} + \frac{p_t - p_s}{\rho} + g y \quad (\text{J/kg})$$

Om den totala manometriska uppforderingshöjden är H fås

$$H \rho = \frac{v_t^2 - v_s^2}{2} + \frac{p_t - p_s}{g} + \rho y \quad 9.1.1$$

Ofta kan y sättas lika med 0 och v_t approx. lika med v_s . Ekv. 9.1.1 får då formen efter division med g

$$H = \frac{p_t - p_s}{\rho g} \quad (\text{m v.p.}) \quad 9.1.2$$

Det senare uttrycket har givit upphov till benämningen manometrisk uppfordringshöjd.

Är den manometriska uppfordringshöjden H och vattenmängden q l/sek kända, fås pumpens effektbehov ur ekvationen

$$P = \frac{\rho g q H}{\eta} \quad (\text{J/sek, watt}) \quad 9.1.3$$

där η = pumpens totala verkningsgrad.

$$1 \text{ hk} = 75 \text{ kgm/sek} = 75 \cdot 9,81 \text{ J/sek (watt)} = 0,736 \text{ kW}$$

$$1 \text{ kW} = \frac{1}{0,736} \text{ hk} = 1,36 \text{ hk}$$

Uttryckt i hk blir ekv. 9.1.3

$$P = \frac{1,36 \cdot \rho \cdot g \cdot q \cdot H}{1000} \text{ hk} \quad 9.1.4$$

9.2 Centrifugalpumpar

Konstruktion och verkningsätt

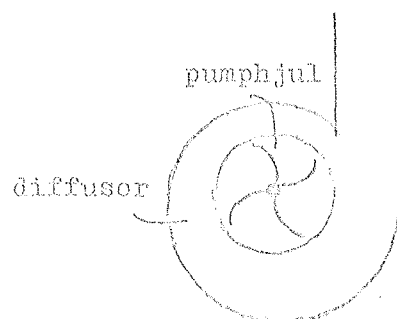


Fig. 9.2. Skiss av pumphjul och diffusor.

Bakåtböjda skovlar är vanligast. I smäcken eller diffusorpartiet omsätts en stor del av rörelseenergin i trycken energi varvid vattenhastigheten går ner till normalvärdet 1,5 - 3 m/sek.

Med hänsyn till pumpens verkningsgrad placeras flera pumphjul i serie vid stor uppforderingshöjd (seriepumpar, flerstegspumpar).

Vid liten uppforderingshöjd och samtidigt behov av stor vattenmängd koppla flera pumphjul parallellt på samma axel. Denna typ undvikes dock i allmänhet på grund av dyrbar tillverkning.

Då centrifugalpumpar arbetar med stor hastighet lämpar de sig för koppling till elmotorer.

Centrifugalpumpen är ej självsugande. Sugförmågan är 5 - 8 m, men pumpen bör ej köras med högre vakuummetrisk sughöjd än 6 m.

Såväl pump som sugledning måste vara fyllda med vatten innan pumpen startas.

Där det är möjligt placeras pumpen under vätskeytan (t.ex. gödselvattenpumpen).

Pumpkaraktistikor vid bestämt varvtal

Fig. 9. 3 visar karakteristikan för en viss centrifugalpump, vilken körs med ett bestämt varvtal.

I diagrammet är också den s.k. "rörledningskarakteristikan" inlagd. Ordinaterna anger där den geodetiska uppforderingshöjden plus rörledningsmotståndet. Då de senare är proportionella mot kvadraten på hastigheten, dvs. också mot kvadraten på vattenmängden, blir denna kurva en parabel med vertex på ordinataxeln. Ju klenare rörledning desto brantare stiger parabeln.

Om ventilen är stängd och pumpen körs med normalt varvtal, så är visserligen q lika med noll men på manometern under ventilen kan man trots detta avläsa en viss tryckhöjd H_0 . Löphjulet arbetar i "dödvatten".

För att åstadkomma tryckhöjden H_0 och för löphjulets rotation förbrukas energi, som ger sig tillkänna genom uppvärmning av vattnet. Det är olämpligt att låta detta tillstånd råda en längre tid.

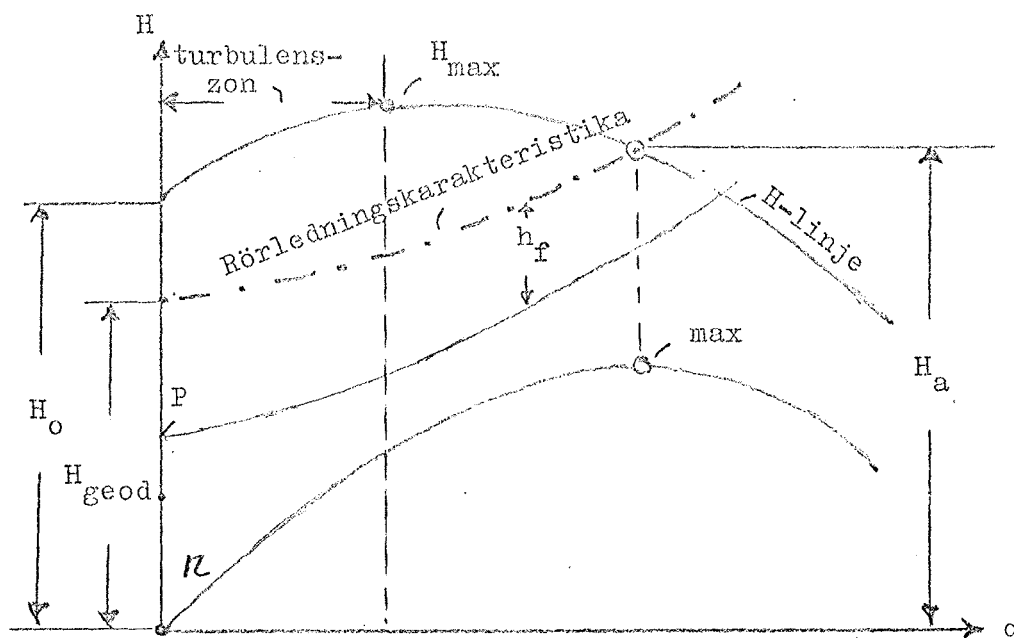


Fig. 9.3. Karakteristikor för en centrifugalpump.

Vid långsam öppning av ventilen börjar vatten uppfordras och H-linjen stiger till ett maximum. Då pumpen först efter en stund kommer i stationärt strömningstillstånd (vid alltför små vattenmängder uppstår turbulens) nås ej från början full tryckhöjd. Den del av kurvan, som ligger innanför maximipunkten kallas turbulenszonen. Samtidigt som q ökar så ökar också P och η , dvs. effektåtgången respektive verkningsgraden.

Öppnas ventilen ytterligare, så sjunker strypmotstånden; H sjunker medan q , P och η fortsätter att stiga.

Maximum av η fås vid de värden på q och H för vilka pumpen konstruerats, dvs. i skärningspunkten för H-linjen och rörledningskaraktistikan. Punkten kallas pumpens "driftpunkt".

Öppnas ventilen helt ökas visserligen q men både H och η sjunker.

Fig. 9.3 visar, att man genom att behålla en minsta uppfordringshöjd H_a genom ventilen kan variera vattenmängden ganska mycket, utan att åstadkomma för låg verkningsgrad.

Den pump är bäst, som har en så flack H-kurva som möjligt. Turbulenszoner bör vara smal. Experimentellt har fastslagits, att detta åstadkommes bäst med bakåtböjda skovlar.

Vid val av pump är det, som framgår av fig. 9.3 ej tillräckligt att känna enbart pumpkarakteristikan. Man måste också veta hur pumpens totala verkningsgrad (eller effektbehov) varierar med vattenmängden genom pumpen.

Pumpens totala verkningsgrad η tar hänsyn till samtliga förluster (friktions- virvel- stöt m.m.).

I allmänhet har en centrifugalpump med stor vattenmängd högre verkningsgrad än en pump med liten vattenmängd.

För en normal enhjulig pump med $q = 100$ l/min är η endast $\approx 0,35$. Vid $q = 1000$ l/min är $\eta \approx 0,60$ och för stora, omsorgsfullt gjorda pumpar kan η t.o.m. överstiga 0,90.

Pumpkarakteristikor vid varierande varvtal

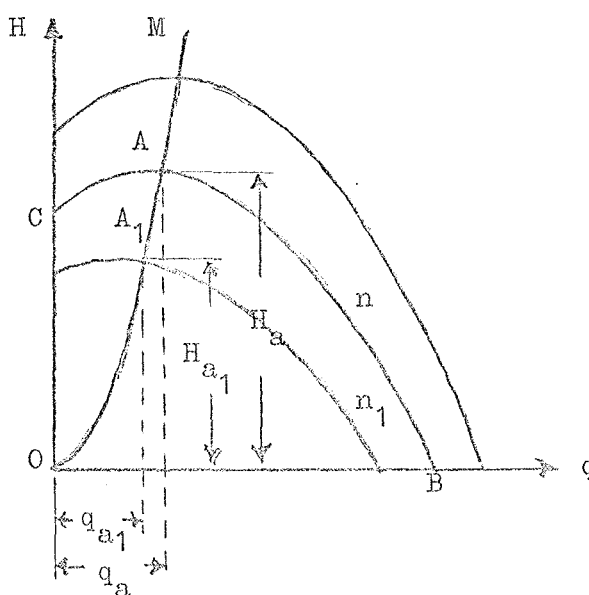


Fig. 9.4. Pumpkarakteristikor vid varierande varvtal.

Köres en viss pump med olika varvtal, så är karakteristikorna kongruenta med varandra.

Fig. 9.4 visar några kongruenta parabler; vertex för var och en ligger på en annan parabel OM. Känner man karakteristikan CAB för en pump vid ett visst varvtal n , så kan man konstruera karakteristikan för vilket varvtal som helst.

Genom punkten A lägges den givna kurvan med H-axeln som huvudaxel. För ett annat varvtal n_1 är abskissorna proportionella mot varvtalen och ordi-

natorna mot kvadraten på varvtalen, dvs.

$$\frac{q_{a1}}{q_a} = \frac{n_1}{n} \quad \text{och} \quad \frac{H_{a1}}{H_a} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2$$

Den givna kurvan behöver nu bara parallellförskjutas till dess dess vertex sammanfaller med den punkt A_1 på parabeln OM, som har de angivna koordinaterna.

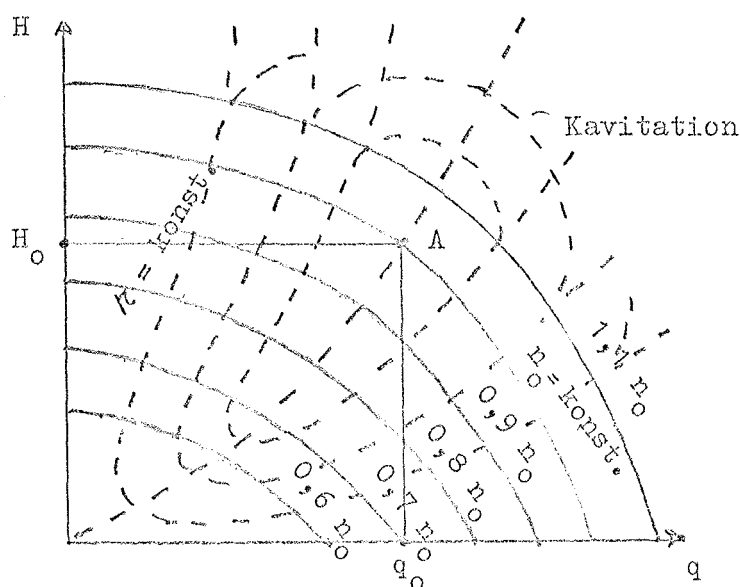


Fig. 9.5. Uppfördringshöjd och uppfördringsvolym vid olika varvtal.

Fig. 9.5 visar sambandet mellan uppfördringshöjd och uppfördringsvolym vid olika varvtal. Här är också inlagda kurvor, som sammanbinder punkter med lika verkningsgrad ($\eta = \text{konst.}$). Vid fullständig dynamisk likformighet blir dessa kurvor parabler.

Beroende på att verkningsgraden avtar vid låga varvtal (resp. låga Reynoldska tal Re) kommer η -kurvorna att avvika från parabelformen. De sluter sig parvis nedtill.

Vid mycket höga värden på n och q kan kavitation uppträda vid inloppet till pumpen.

Kavitation uppkommer på följande sätt.

Trycket i pumphjulet varierar i olika punkter beroende på lokala tryck-

sänkningar. Dessa kan vara förorsakade av att utrymmet mellan skovlarna ej är helt fyllt med vatten. Om trycket vid pumphjulets inlopp sjunker under vattenångans mättningsstryck vid rådande temperatur, sker en förångning. Det uppkommer då ett hålrum, en kavitet, i vilken det råder ett konstant tryck. Dessa kaviteter uppstår periodiskt, dvs. de bildas och försvinner med regelbunden frekvens. Ofta är "explosionerna" tydligt hörbara. Resultatet blir en erosion av pumphjulsmaterialet med åtföljande kraftig nedsättning av verkningsgraden.

Uppträder kavitation avviker η -kurvorna från parabelformen också upptill med påföljd att de sluter sig även där. η -kurvorna bildar ellipsliknande formationer ("äggkurvor") (se fig. 9.5).

Diagrammet i fig. 9.5 visar att pumpen har sin bästa verkningsgrad i punkten A, dvs. vid de värden (q_0 , H_0 och n_0) för vilken den är konstruerad.

Reglering av vattenmängden

Vattenmängden kan regleras genom att i tryckledningen införa ett extra strömningsmotstånd, t.ex. en regleringsventil, eller genom att ändra varvtalet.

Den förra metoden kallas strypreglering, den senare varvtalsreglering. Ur effektsynpunkt är varvtalsreglering betydligt gynnsammare än strypregleringen, som medför avsevärda energiförluster. Fig. 9.5 visar emellertid att om, som ofta är fallet, uppforderingshöjden är relativt konstant, kan varvtalet sänkas endast obetydligt. Pumpen blir i annat fall ur stånd att uppföra vätska. Då det händer, att en relativt liten minskning av elspänningen ger upphov till komplikationer måste oftast vätskemängden ändras genom strypreglering.

9.3 Vattenringpumpar

Konstruktion och verkningsätt

Vattenringpumparna är både till verkningsätt och egenskaper ett mellanting mellan centrifugalpumpar och tvångsstyrande pumpar eller förträngningspumpar (displacement pumps, Verdrängungspumpen) t.ex. kolvpumpar, kugghjulpumpar och skruvpumpar.

Arbetsorganet är ett hastigt roternade hjul med raka skovlar (fig. 9.6).

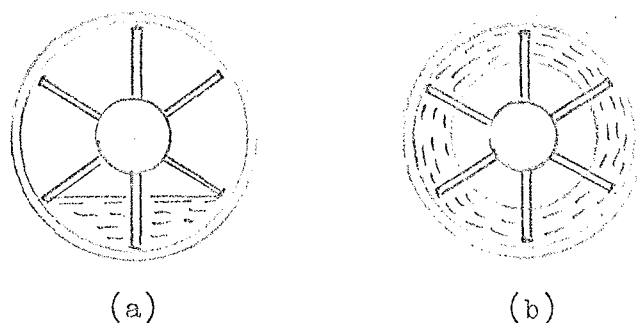


Fig. 9.6. Skiss av arbetsorganet i en vattenringpump: (a) pumphuset delvis fyllt med vatten; (b) med roternade vattenring.

Före igångsättningen måste en viss vattenmängd fyllas på pumphuset.

Sugledningen behöver inte fyllas, vattenringpumpen är självsugande.

Vattenhastigheten bör, som för centrifugalpumpen, normalt vara 1,5 - 3 m/sek i rörledningen.

Med hänsyn till slitage m.m. bör den vakuummetriska sughöjden ej överstiga 7 m.

En kombination av centrifugalpump och vattenringpump förekommer, där man drar nytta av vattenringpumpens självsugningsförmåga för evakuering av sugledningen.

Till skillnad från centrifugalpumpen är vattenringpumpen synnerligen känslig för fasta föroreningar i vattnet.

Vattenringpumpen lämpar sig för direktkoppling till elektrisk motor.

Vid normalt varvtal (ca 1400 rpm) är i regel manometriska uppfordringshöjden för ett skovelhjul maximalt 25 m. Av denna anledning utföres vattenringpumparna vanligen med två eller flera hjul sittande på samma axel och arbetande i serie. Vattnet går från det ena skovelhjulets pumphus till det andras och trycket ökar undan för undan.

Pumpar med 2 och 3 hjul är vanligast. Dock förekommer ända upp till 6-hjuliga pumpar med en maximal manometrisk uppfordringshöjd av ca 140 m.

H som funktion av q

Liksom för centrifugalpumpen finns det för vattenringpumpen ett bestämt samband mellan uppforderingshöjd H och vattenmängd q vid konstant varvtal, trots att vattenringpumpen arbetar enligt förträngningsprincipen. Detta beror på att mottrycket påverkar den av centrifugalkraften åstadkomna tvångsstyrande vattenringen.

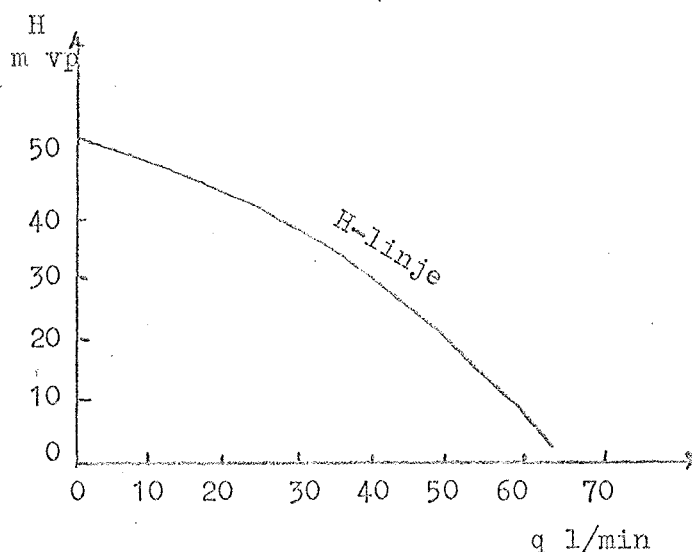


Fig. 9.7. Normal karakteristika för en ny vattenringpump med 1 hk motor.

Pumpkarakteristikan är kontinuerligt fallande enligt fig. 9.7.

Trycket når ett bestämt maximivärde vid strypning.

η och P som funktioner av q

Fig. 9.8 visar pumpeffektskarakteristikan och verkningsgradskurvans utseende för pumpen ovan. Effektbehovet är störst vid tomgång och sjunker sedan efterhand som trycket minskar och vattenmängden ökar.

Vid centrifugalpumpar är förhållandet det motsatta, trots att pumpkarakteristikan (H -linjen) i princip har samma förlopp. Olikheten beror på att vattenringpumpen har mycket större energiförluster i förhållande till centrifugalpumpen vid liten vattenmängd, dvs. högt tryck, än vid stor vattenmängd.

Maximala verkningsgraden är hos vattenringpumpen låg, ca 20-30 %. Vattenringpumpen är i detta hänseende likvärdig med en liten centrifugalpump men avsevärt sämre än en kolypump.

Den låga verkningsgraden begränsar vattenringpumpens användning till mind

re pumpanläggningar (t.ex. hydroforanläggningar), där den erforderliga vattenmängden ej överstiger 100–150 l/min.

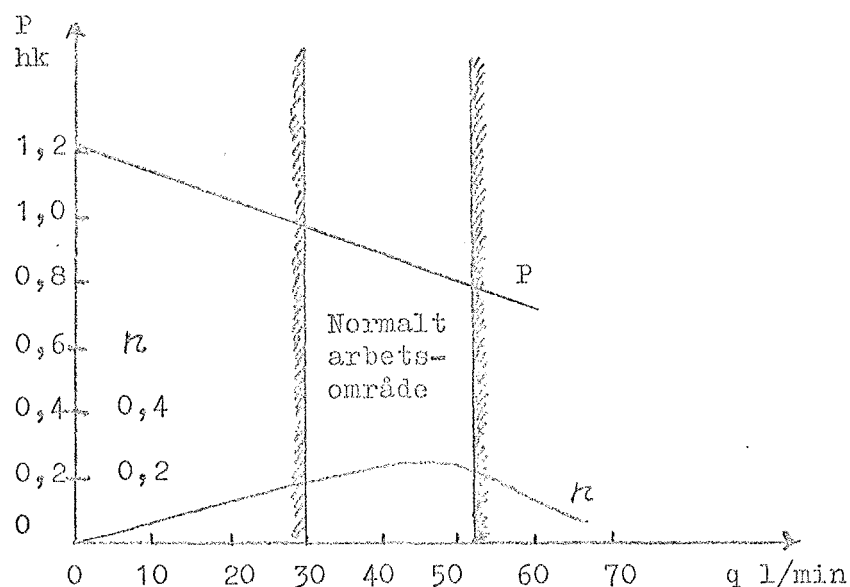


Fig. 9.8. Pumpeffektskaraktistikan och verkningsgradskurvan för pumpen i fig. 9.7.

Då vattenringpumpen är billig i inköp, enkel att sköta och mycket driftsäker, samt vid rent vatten har en lång livslängd, är den mycket använd i villor och jordbruksfastigheter.

9.4 Kolvpumpar

Konstruktion och verkningsätt

Kolvpumparna tillhör de s.k. tvångsstyrande pumparna tillsammans med membran – kugghjuls- och skruvpumparna.

Trycket stiger vid strypning utan att nå något bestämt maximivärde till dess pumpen stannar eller tryckröret sprängs sönder.

Kolvpumpen är, till skillnad från centrifugalpumpen, själv sugande.

Man fordrar att en kolvpump utan påfyllning skall kunna ta upp vatten från 8 à 9 m djup.

Arbetssätt

Man indelar kolvpumparna med hänsyn till arbetssättet i

1. Enkelverkande pumpar
2. Dubbelverkande pumpar
3. Differentialpumpar

Beroende på om kolven arbetar horisontellt eller vertikalt, talar man om liggande eller stående pumpar.

Enkelverkande pumpar indelas i tryck- och lyftpumpar.

Enkelverkande tryckpump har alltid s.k. plungekolv (se fig. 9.9).

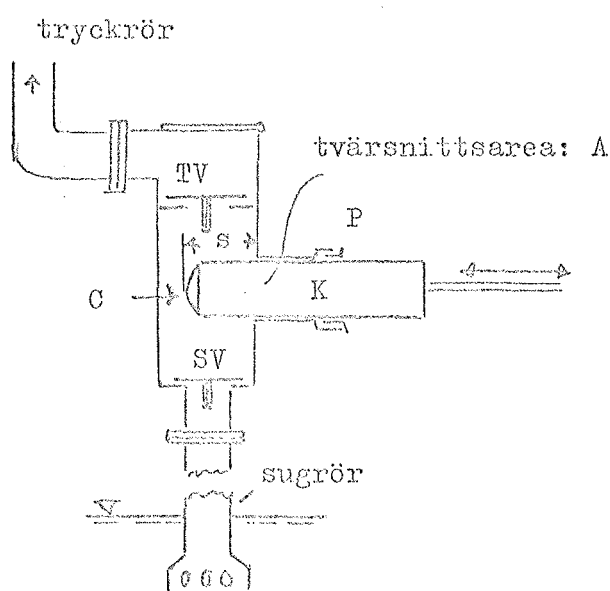


Fig. 9.9. Enkelverkande tryckpump.

Pumpcylinderna C är nertill försedd med den sugventil SV och upptill med en tryckventil TV. Kolven K rör sig horisontellt fram och åter och tätas av packboxen P.

Är A kolvarcan i m^2 och S lika med slaglängden i m frilägges, om pumpen är fylld med vatten, vid kolvens rörelse åt höger en volym AS i cylindern. Trycket i cylindern minskas; det uppstår ett undertryck.

Atmosfärstrycket, som verkar på vattenytan i brunnen orsakar då, att sugventilen öppnas och ett vattnet sätts i rörelse uppåt. Den i cylindern frilagda volymen AS fylls med nytt vatten. När kolven nått sitt högra dödläge stängs sugventilen, antingen på grund av sin egen tyngd, eller med hjälp av fjäderbelastning. Förloppet kallas pumpens sugverkan.

Vid kolvens tillbakagång (åt vänster) öppnas tryckventilen och kolven tränger ut vattenmängden As i tryckröret. Vattenmassan i tryckröret sätts i rörelse och vattenmängden As kan tas ut vid lämpligt tappställe. Vid slutet av kolvslaget stängs tryckventilen. Förloppet kallas pumpens tryckverkan.

För varje varv som veven roterar, dvs. för varje dubbelslag, befordras $As\text{ m}^3$. Vid n rpm blir i medeltal den per sek. levererade vattenmängden

$$q = \frac{As\ n}{60} \text{ (m}^3\text{/sek.)} \quad 9.4.1$$

För att utjämna de s.k. vattenslagen och för att åstadkomma en jämnare gång utrustas kolvpumparna med luftklockor.

Förhållandet är det, att atmosfärstrycket skall räcka till, inte bara för den statiska sughöjden och tryckförlusterna i sugledningen utan också för sugventilens öppningsmotstånd (ventilbelastning vanligen 0,5 - 1 m vp) och vattnets acceleration i takt med kolvens acceleration. Inträffar det att vattenpelaren ej följer med kolven uppstår vakuum vanligen närmast denna. När kolven sedan retarderar uppkommer vattenslag.

Ju mindre sugledningens tvärsektion är, desto större blir den erforderliga accelerationen hos vattenpelaren i sugledningen, för att inte vattenslag skall uppstå. Man bör alltså välja relativt grov sugledning.

Det kan tilläggas att det vid sprutor är absolut nödvändigt att ha luftklockor för att få ett jämnt vattenflöde. Vattnets intermittenta rörelse blir kontinuerlig genom att vattnet ackumuleras i luftklockorna under korta perioder.

På grund av pulseringen väljer man vattenhastigheten i rörledningarna lägre än motsvarande för centrifugal- och vattenringpumpar. Den bör ej överstiga 1 m/sek i sugledningen och 1,5 m/sek i tryckledningen.

Kolvpumparna lämpar sig inte för direktkoppling till elektrisk motor. Nedväxlingen ordnas med rem eller kuggväxel till normalt 50-150 rpm.

Jämfört med centrifugal- och ringpumparna har kolvpumparna hög verkningsgrad. Framförallt vid små pumpar är skillnaden stor.

Är t.ex. $q = 100\text{ l/min}$ och $H = 30\text{ m}$ är η för en kolvpump 0,70 mot endast

0,35 för en centrifugalpump.

Vid större väl konstruerade kolvpumpar kan η uppgå till 0,90 eller högre.

η varierar vid normala varvtal endast obetydligt med vattenmängd och tryck, till skillnad från vad som är förhållandet vid en centrifugalpump.

Volymetrisk verkningsgrad

Förutom den totala verkningsgraden η bestämmer man vid provning också den volymetriska verkningsgraden, η_{vol} .

Denna är förhållandet mellan den av pumpen uppfordrade vattenmängden q_e och den beräknade q

$$\eta_{\text{vol}} = \frac{q_e}{q} \quad 9.4.2$$

q_e mätes och q beräknas med kännedom om pumpens cylinderdiameter, kolvens slaglängd, kolvstångens diameter och varvtalet per minut.

Den volymetriska verkningsgraden tar hänsyn till förluster på grund av otätheter i packboxar, ventiler och rörledningar. Är sugledningen otät fås en blandning av vatten och luft. En sådan blandning kan också uppkomma genom vattnets naturliga halt av luft. Under sugslaget samlar sig en del av luften i cylinderns högre liggande del. En riktigt konstruerad cylinder bör vara sådan, att luften under tryckslaget helt försvinner till tryckröret.

Ventilerna öppnar och stänger med en viss försening i relation till slagväxlingen, något, som också verkar minskande på den uppfordrade vattenmängden q_e .

Vanligen kan man sätta η_{vol} till 0,90 à 0,98, där det mindre värdet gäller för små pumpar och det större för stora pumpar t.ex. vid vattenverk.

Enkelverkande lyftpump

Lyftpumpar har ihålig skivholv, försedd med tryckventil TV (fig. 9.10).

Vid rörelse upåt öppnas sugventilen SV och kolven insuger vattenmängden $\Delta s \cdot m^3$. Samtidigt lyftes i tryckröret den ovanför kolven liggande vatten-

mängden $(A - a) s$ där $a = \pi d^2/4 =$ kolvstångens tvärsnittsarea.

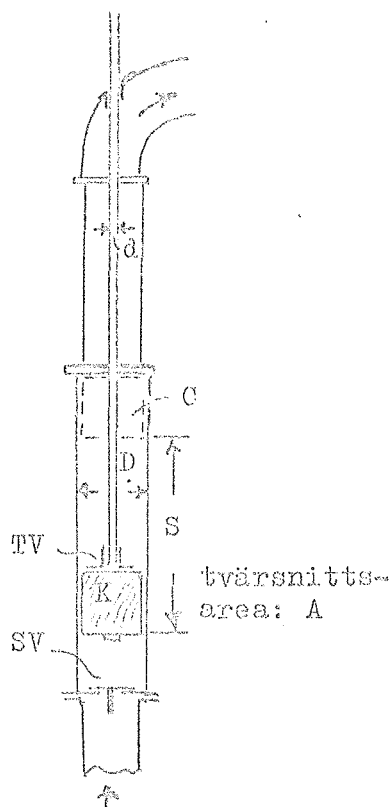


Fig. 9.10. Enkelverkande lyftpump.

Vid rörelse nedåt stängs sugventilen och den under kolven varande vattenmängden As passerar genom tryckventilen, som nu öppnats. Samtidigt friläggas ovanför kolven volymen $(A - a) s$, varför mängden $As - (A - a)s$ trängs ut ur tryckröret.

För varje dubbelslag befordrar pumpen således vattenmängden $(A - a) s + as = A$ och per sek. blir således

$$q = \frac{As n}{60}$$

9.4.3

Eftersom a är litet i förhållande till A uträttas större delen av uppföringsarbetet under lyftslaget. Bortser man från a , kan lyftpumpen anses som enkeltverkande.

Lyftpumpen är lämplig vid djupa brunnar.

Vid tryckhöjder på ca 40 m eller mera blir skivkolvens tätning bristfällig och där används lyftpumpar med rörkolvar s.k. enkeltverkande Rittinger-pumpar. Tätningen sker här genom två packboxar, som kan dras till utifrån.

Dubbelverkande pumpar

Dubbelverkande pumpar göres antingen liggande eller stående. Skivkolvar används vid små tryckhöjder, annars utnyttjas plungekolar. I det senare fallet finns två konstruktionstyper, beroende på om man använder enkel-kolv eller dubbelkolv.

Trots den höga verkningsgraden och självsugningsförmågan har kolvumpen undanträngts av andra pumpstyper vid elmotordrift.

Detta beror på den långsamma gången, de många rörliga delarna, stort erforderligt utrymme och hög anskaffningskostnad.

9.5 Hydroforanläggningar

Hydroforen tjänstgör både som vattenmagasin och som tryckutjämnare för tryckledningen.

Hydroforens storlek är inte avgörande för möjlig dygnsförbrukning. Denna är avhängig av pumpen, motorn och vattentillgången i brunnen.

Pumpstorlek väljes med hänsyn till maximala vattenförbrukningen per timma och högsta manometriska uppforderingshöjd (frånslagstrycket).

Maximiförbrukningen per timma brukar på en lantgård ligga mellan 15 och 25 % av dygnsförbrukningen.

Tillslagstrycket väljes så att det med 3-5 m vp överstiger manometriska tryckhöjden till det högst belägna tappstället.

Frånslagstrycket bör vara minst 10 m vp (1 kp/cm^2) högre än tillslagstrycket med hänsyn till att hydroforen skall få rimlig kapacitet mellan från- och tillslag och att tryckströmbrytaren ej skall arbeta ideligen.

Skilnadens får å andra sidan ej göras för stor då pumpen i så fall måste arbeta mot alltför stort mottryck.

Pumpen skall väljas så att den har sin bästa verkningsgrad mellan till- och frånslagstrycket.

Vanliga värden är

tillslagstryck: $1,5 - 3,0 \text{ kp/cm}^2$ ($\approx 1,5 \cdot 10^5 - 3,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, pascal)
 frånslagstryck: $2,5 - 4,5$ " ($\approx 2,5 \cdot 10^5 - 4,5 \cdot 10^5$ " , pascal)

Val av pump

Valet står emellan vattenringpump, centrifugalpump och kolvump.

Där den vakuummetriska sughöjden är mindre än 7 à 7,5 m och erforderlig vattenmängd är måttlig (100 à 150 liter per minut) väljes vattenringpump.

Vid större anläggningar är centrifugalpumpen betydligt mera ekonomisk.

Ligger den vakuummetriska sughöjden mellan 7-15 m och det som ovan är fråga om små vattenmängder kan vattenringpumpen användas i kombination med en djupsugare, som arbetar enligt ejektorprincipen. Denna placeras vid bottenventilen i brunnen (fig. 9.11).

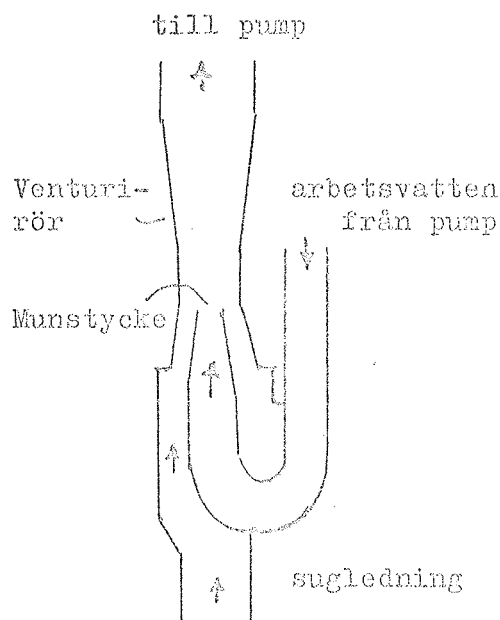


Fig. 9.11. Skiss av djupsugare.

Verkningsgraden hos en anläggning med djupsugare är låg, endast 5 à 10 %.

Driftssäkerheten minskar bl.a. på grund av risken för igensättning.

Djupsugare används också kombinerad med centrifugalpump.

På grund av kolvumpens goda verkningsgrad kan en anläggning med kolvumpar

och djupsugare vara försvarlig även vid relativt stort vattenbehov t.ex. 250 l/min.

Den mest använda pumptypen vid djupa brunnar är djupbrunnskolvpumpen (Rit-tingerpumpen).

En anläggning med bergborrad brunn och djupbrunnskolvpump är dyr i anskaffning och montering.

Vid större vattenmängder, t.ex. för kommunala och industriella behov används turbinpumpar (vid uppföring av vatten från djupa borrhål).

Den elektriskmotorn är placerad i en pumpkammare över borrhålet och driver med hjälp av en lång axel den i borrhålet nersänkta pumpen, som är av centrifugaltyp och i regel har ett flertal hjul.

Omnämnas bör också de s.k. undervattenspumparna, dvs. djupbrunnspumpar (centrifugaltyp) med såväl pump som motor nedsänkta under vattenytan.

Hydroforens effektiva volym

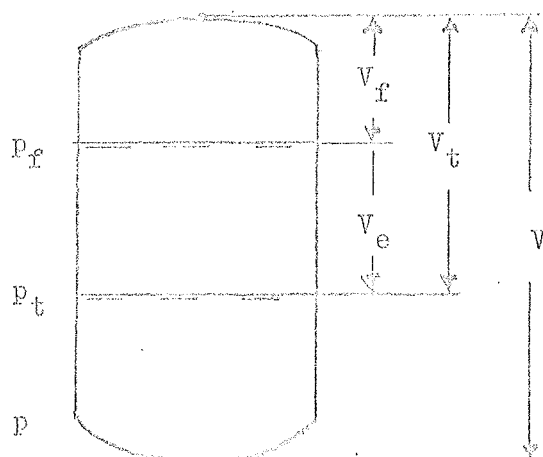


Fig. 9.12. Skiss av hydrofor.

Vi studerar fig. 9.12. Hydroforens effektiva volym V_e , dvs. den vatten-
volym hydroforen ger mellan frånslag och tillslag bestämes förutom av
totala volymen V , av tillslagstrycket p_t , frånslagstrycket p_f och luft-
trycket i hydroforen då denna är tom på vatten p .

Vi använder Boyles lag (temp. oförändrad) och får

$$V \cdot p = V_t \cdot p_t = V_f \cdot p_f$$

Vi har också att $V_e = V_t - V_f$

9.5.2

Ur ekv. 9.5.1 får vi att

$$V_t = \frac{V \cdot p}{p_t} \quad \text{och} \quad V_f = \frac{V \cdot p}{p_f} \quad \text{varför ekv. 9.5.2 ger}$$

$$V_e = \frac{V \cdot p}{p_t} - \frac{V \cdot p}{p_f} = V \cdot p \left(\frac{1}{p_t} - \frac{1}{p_f} \right) = V \cdot p \cdot \frac{(p_f - p_t)}{p_t \cdot p_f} \quad 9.5.3$$

Exempel

Är $p = 98,1 \cdot 10^3$ pascal (1 kp/cm^2) absolut tryck, $p_t = 392,4 \cdot 10^3$ pascal (4 kp/cm^2) absolut tryck och $p_f = 490,5 \cdot 10^3$ pascal (5 kp/cm^2) absolut tryck, så fås

$$V_e = V \cdot 98,1 \cdot 10^3 \frac{490,5 \cdot 10^3 - 392,4 \cdot 10^3}{392,4 \cdot 10^3 \cdot 490,5 \cdot 10^3} = \underline{0,05 \text{ V}}$$

Här föreligger inget övertryck.

Ökas p till $196,2 \cdot 10^3$ pascal (2 kp/cm^2) absolut tryck blir

$$V_e = V \cdot 196,2 \cdot 10^3 \frac{490,5 \cdot 10^3 - 392,4 \cdot 10^3}{392,4 \cdot 10^3 \cdot 490,5 \cdot 10^3} = \underline{0,1 \text{ V}}$$

Mottrycket blir här för stort.

Är $p = 196,2 \cdot 10^3$ pascal (2 kp/cm^2) absolut tryck, $p_t = 294,3 \cdot 10^3$ pascal (3 kp/cm^2) absolut tryck och $p_f = 490,5 \cdot 10^3$ pascal (5 kp/cm^2) absolut tryck fås

$$V_e = V \cdot 196,2 \cdot 10^3 \frac{490,5 \cdot 10^3 - 294,3 \cdot 10^3}{490,5 \cdot 10^3 \cdot 294,3 \cdot 10^3} = \underline{0,267 \text{ V}}$$

Här är mottrycket av lagom storlek och hydroforen får här en relativt stor effektiv volym.

10. Stationär strömning i slutna ledningar

10.1 Tryck- och energilinjor

Begreppen tryck- och energilinjor har redan definierats och diskuterats i avsnitt 4.11. De är särskilt användbara vid lösandet av mera komplexa strömningsproblem.

I fig. 10.1 visas tryck- och energilinjerna för en, från en reservoar dragen, enkel rörledning med en ventil och ett munstycke. För att kunna konstruera dessa linjer vid en given nivå på vätskeytan i reservoiren tillämpas först energiekvationen från reservoiren till rörmynningen innefattande alla mindre förluster tillsammans med rörfriktionen. Ekvationen löses med avseende på hastighetshöjden $v^2/2g$.

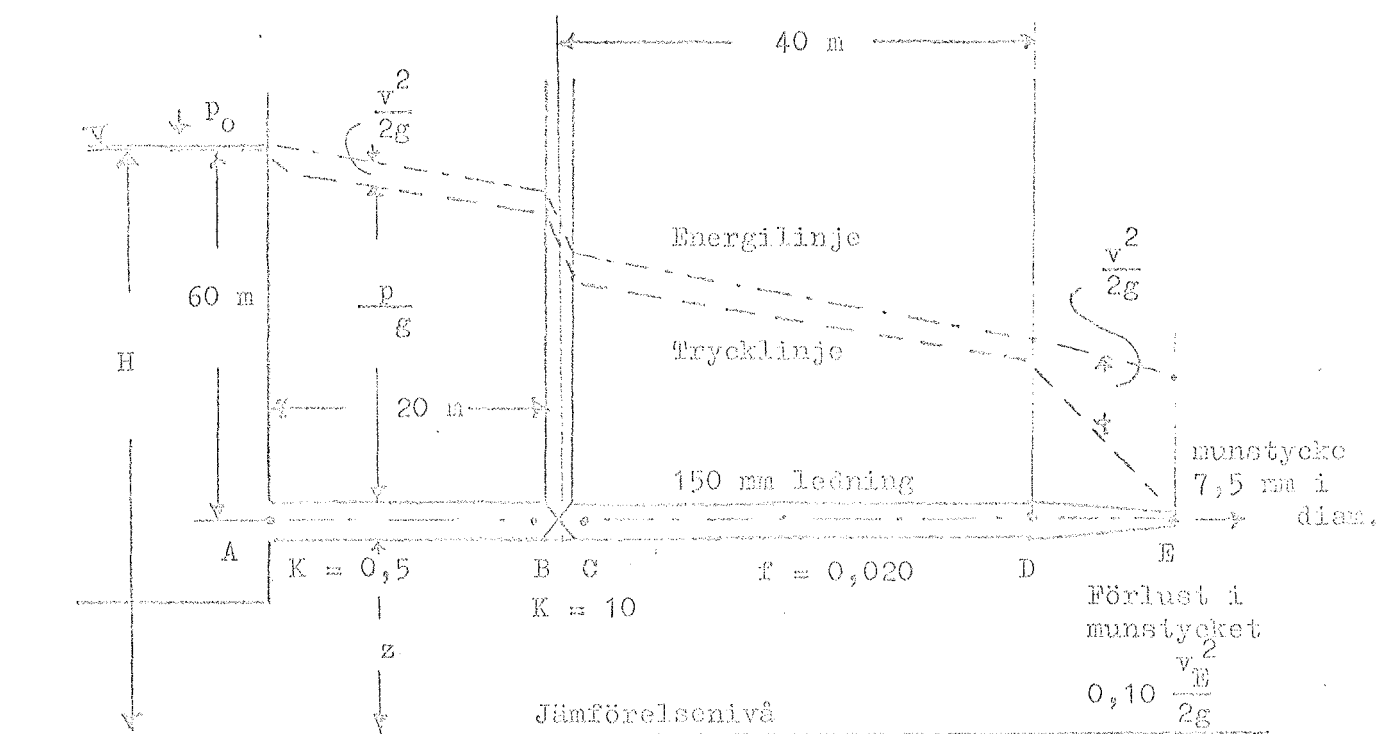


Fig. 10.1. Tryck- och energilinjor.

Vid bestämning av höjden för trycklinjen i en godtycklig punkt tillämpas på samma sätt energiekvationen från reservoiren till punkten ifråga, varvid alla förluster mellan punkterna inräknas. Ekvationen löses med avseende på $p - p_0/g + z$ (p_0 = atm.färstrycket) och resultatet avsätter ovanför jämförelsenivån. För att finna energilinjens nivå för samma punkt på abscissan löses ekvationen med avseende på $v^2/2g + p - p_0/g + z$. Avsättning sker, som ovan, ovanför referensnivån.

Vätskeytan i reservoiren är på samma gång trycklinje och energilinja. Vid inträdet i röret faller energilinjen med beloppet $0,5 v^2/2g$ på grund av inströmningsförlusten ($K = 0,5$).

Fallet för trycklinjen fås ur energiekvationen, eller

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + 0,5 \frac{v^2}{2g}$$

som ger

$$\frac{p - p_0}{\rho g} + z = H - 1,5 \frac{v^2}{2g}$$

Trycklinjen faller alltså $1,5 v^2/2g$. Tryckförlusten beroende på inströmningsförlusten i röret sker i verkligheten ej plötsligt vid inträdet utan på en sträcka av ungefär 10 rördiametrar nedströms.

Exempel 10.1. Bestäm nivåerna för tryck- och energilinjerna vid punkterna A, B, C, D och E i fig. 10.1.

Lösning: För en referensnivå i rörets centrum fås för hastighetshöjden

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + 60 = \frac{v_E^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + 0 + 0,5 \frac{v^2}{2g} + 0,02 \frac{60 v^2}{0,15 \cdot 2g} + 10 \frac{v^2}{2g} + 0,10 \frac{v_E^2}{2g}$$

Kontinuitetsekv. ger

$$v_E \cdot \Pi \cdot \frac{0,075^2}{4} = v \cdot \Pi \cdot \frac{0,15^2}{4}; \quad v_E = 4 v$$

Efter hyfsning erhålles

$$60 = \frac{v^2}{2g} (16 + 0,5 + 8 + 10 + 1,6) = 36,1 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

och $v^2/2g = 1,66$ m vp.

Tillämpning av energiekvationen på delen mellan reservoiren och A

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + 60 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + 0,5 \frac{v^2}{2g}$$

Då fås för trycklinjen vid A

$$\frac{p - p_0}{\rho g} + z \Big|_A = 60 - 1,5 \frac{v^2}{2g} = 60 - 1,5 \cdot 1,66 = 57,51 \text{ m}$$

Energilinjens för A är

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\rho g} = 57,51 + 1,66 = 59,17 \text{ m}$$

för B

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + 60 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + 0,5 \frac{v^2}{2g} + 0,02 \frac{20}{0,15} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

och

$$\frac{p - p_0}{\rho g} + z \Big|_B = 60 - 1,66 (1,5 + 2,67) = 60 - 6,92 = 53,08 \text{ m}$$

Energilinjens ligger vid B på nivån $53,08 + 1,66 = 54,74 \text{ m}$

Genom ventilen faller trycklinjen $10 v^2/2g$ eller $16,6 \text{ m}$.

Då fås, att energi- och trycklinjen vid C ligger på nivån $38,14$ och $36,48 \text{ m}$ respektive.

Vid punkt D

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + 60 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + (10,5 + 0,02 \frac{40}{0,15}) \frac{v^2}{2g}$$

och

$$\frac{p - p_0}{\rho g} + z \Big|_D = 60 - 1,66 \cdot 15,83 = 60 - 26,28 = 33,72$$

med energilinjens vid $33,72 + 1,66 = 35,38 \text{ m}$.

Vid punkt E är trycklinjen lika med p_0 och energilinjens blir

$$\frac{v_E^2}{2g} = 16 \frac{v^2}{2g} = 16 \cdot 1,66 = 29,56 \text{ m}$$

Den hydrauliska gradienten är fallet på trycklinjen för en horisontell ledning. För en icke horisontell ledning är den

$$\frac{d(p - p_0/\rho g + z)}{dl}$$

Energigradienten är fallet på energilinjén för en horisontell ledning. För en icke horisontell ledning är den

$$\frac{d(v^2/2g + p - p_0/\rho g + z)}{dl}$$

I många situationer med långa rörledningar kan mindre förluster försummas (t.ex. om de är mindre än 5 % av rörfriktionsförlusterna) eller de kan innefattas som ekvivalenta rörlängder, vilka adderas till den verkliga längden vid problemlösningen.

Vid dylika situationer är värdet på hastighetshöjden $v^2/2g$ liten i jämförelse med $f(l/d) v^2/2g$ och försummas därför, Trycklinjen kommer då att ligga enligt fig. 10.2.

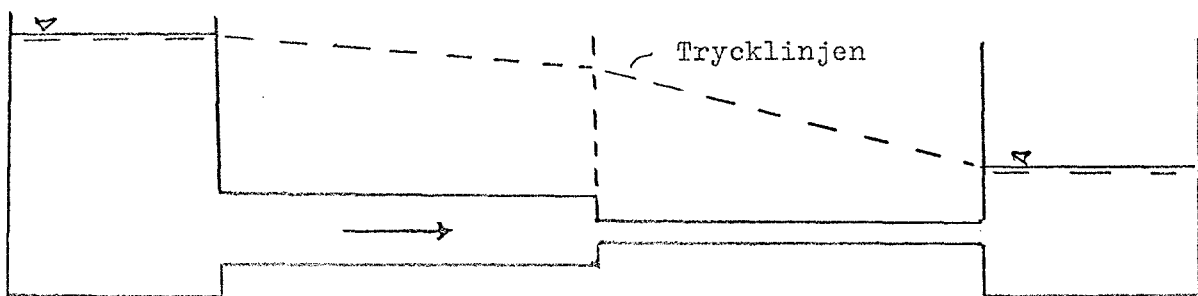


Fig. 10.2. Trycklinjen för lång rörledning, där mindre förluster försummas eller innefattats som ekvivalent rörlängd.

Ingen hänsyn tas till förändringen i trycklinjen för mindre förluster. Vid dessa situationer med långa rörledningar blir den hydrauliska gradienten h_f/l , med h_f given enligt Darcy-Weisbachs ekvation

$$h_f = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

10.1.1

En strömning - utom genom en pump - sker alltid i riktning av en fallande energilinjé.

I en pump tillförs strömningen energi, ett förhållande, som kan uttryckas med energiekvationen, t.ex. genom införande av negativa förluster.

Trycklinjen stiger hastigt i en pump. Fig. 10.3 visar tryck- och energilinjerna för ett system med en pump och en hävert.

Exempel 10.2. En pump med motor på 10 hk och en verkningsgrad på 70 % levererar 85 l/sek. Pumpen har en 150 mm diameter sugledning och en 100 mm diameter tryckledning. Sugledningens anslutning till pumpen ligger 0,9 m under tryckledningens. För ett sugtryck på 0,7 atm, beräkna trycket vid tryckflänsen och stigningen i trycklinjen genom pumpen.

Lösning: Vi har enligt relationen

$$P = \frac{1,36 \cdot Q \cdot g \cdot q \cdot H}{1000 \cdot \eta}$$

att

$$10 = \frac{1,36 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,085 \cdot H}{1000 \cdot 0,7}$$

eller

$$H = \frac{7}{1,36 \cdot 9,81 \cdot 0,085} = 6,17 \text{ m}$$

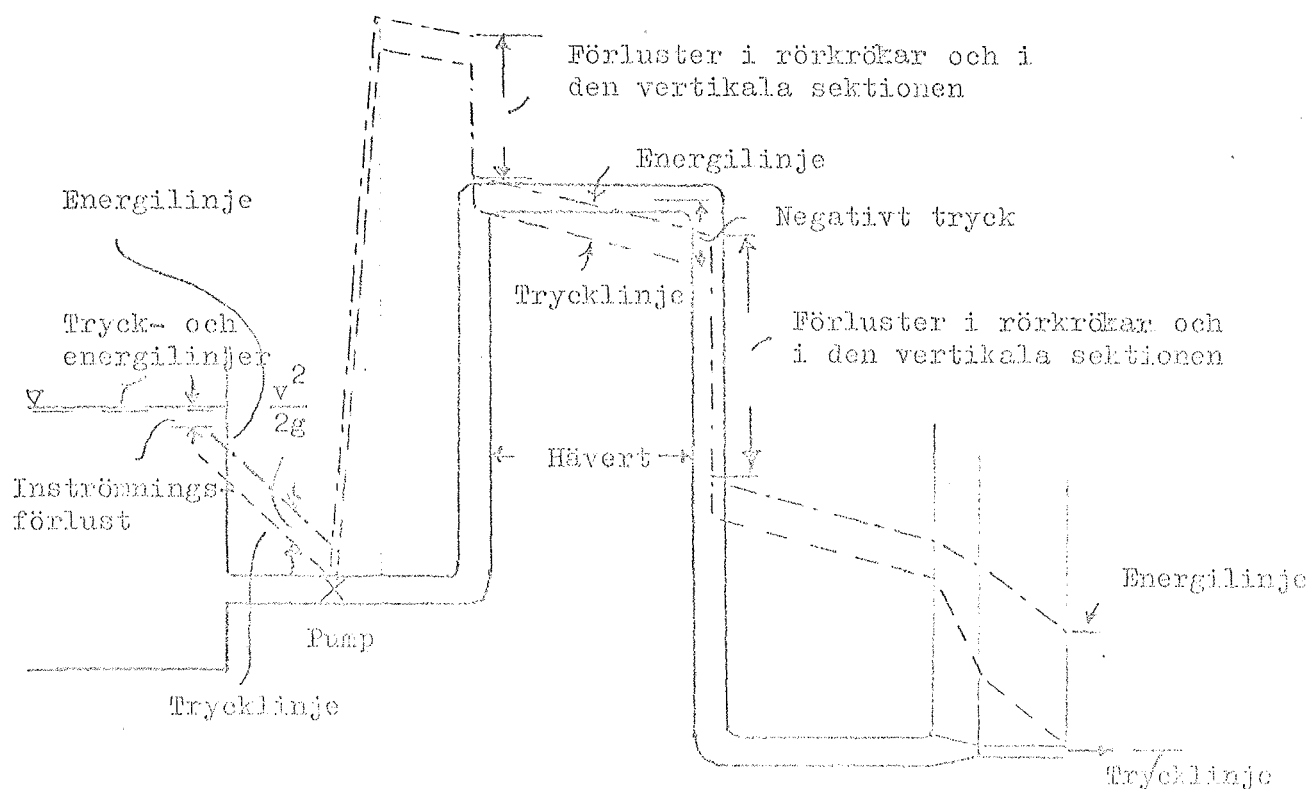


Fig. 10.3. Tryck- och energilinjjen för ett system med pump och hävert.

Genom att tillämpa energiekvationen från sugfläns till tryckfläns fås

$$\frac{v_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\rho g} + 0 + 6,17 = \frac{v_t^2}{2g} + \frac{p_t}{\rho g} + 0,9$$

Kontinuitetsekvationen ger

$$q = v \cdot A = 0,085 = v_s \cdot \pi \cdot 0,075^2$$

$$v_s = \frac{0,085}{\pi \cdot 0,075^2} = 4,81 \text{ m/sek}$$

På samma sätt fås för v_t

$$v_t = \frac{0,085}{\pi \cdot 0,05^2} = 10,82 \text{ m/sek}$$

Vi löser ekv. ovan med avseende på p_t ($p_s = 0,7 \text{ atm} = 0,7 \cdot 101325 \text{ N}$) och erhåller

$$\frac{p_t}{g} = \frac{4,81^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{0,7 \cdot 101325}{1000 \cdot 9,81} + 6,17 - \frac{10,82^2}{2 \cdot 9,81} - 0,9$$

$$\frac{p_t}{g} = 1,179 + 7,233 + 6,17 - 5,967 - 0,9 = 7,72 \text{ m vp}$$

$$\text{och } p_t = \frac{7,72 \cdot 1000 \cdot 9,81}{101325} = \frac{7,72 \cdot 3,27}{33,78} = 0,75 \text{ atm.}$$

En turbin tar energi från strömningen och förorsakar ett hastigt fall i både energi- och trycklinjen.

10.2 Hävert

En sluten ledning, som i fig. 10.4, vilken lyfter en vätska till högre nivå än vätskans fria yta och låter avbördning ske på en lägre nivå, benämnes hävert. Den har begränsad kapacitet beroende på de låga tryck, som uppträder i hävertens översta del (vid S i fig. 10.4).

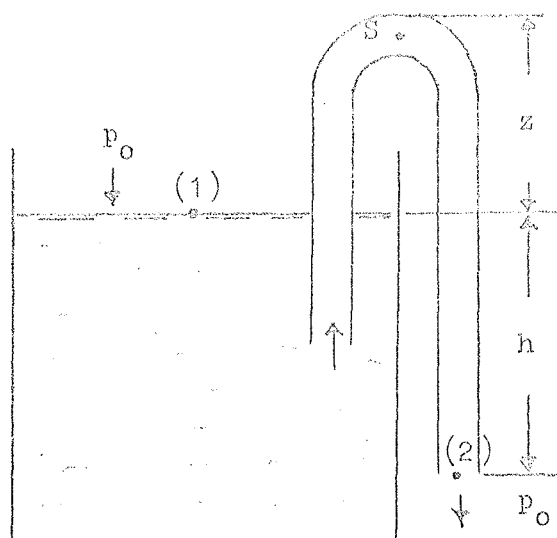


Fig. 10.4. Hävert.

Tillämpning av energiekvationen vid fullgång mellan punkterna (1) och (2) i fig. 10.4 ger för ett jämförelseplan genom (2)

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + 0 + K \frac{v^2}{2g} + f \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2}$$

eller

$$h = \frac{v^2}{2g} + K \frac{v^2}{2g} + f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

där K är summan av alla mindre förlustkoefficienter. Vi kan då skriva

$$h = \frac{v^2}{2g} (1 + K + f \frac{l}{d}) \quad 10.2.1$$

Med avbördningen känd fås en direkt lösning av h. Vid lösning av hastigheten vid givet värde på h måste passning tillämpas. Man börjar med att anta ett värde på f.

Trycket i hävertens översta del vid S erhålles genom tillämpning av energiekvationen för delen mellan punkt (1) och punkt S efter lösning av ekv. 10.2.1. Det blir för en jämförelsenivå genom punkt (1)

$$0 + \frac{p_0}{\rho g} + 0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_S}{\rho g} + y_S + K' \frac{v^2}{2g} + f \cdot \frac{l'}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

där K' är summan av mindre förlustkoefficienterna mellan de två punkterna och l' är ledningens längd uppströms till S. Vi löser med avseende på trycket och får

$$\frac{p_s - p_o}{\rho g} = -y_s - \frac{v^2}{2g} \left(1 + K' + f \frac{l}{d}\right)$$

10.2.2

Ekvationen visar, att trycket är negativt och att detta minskar med ökande y_s och $v^2/2g$.

Om lösningen av ekvationen skulle ge ett värde på $(p_s - p_o)/\rho g$ lika med eller mindre än vätskans ångtryck, då gäller ej ekv. 10.2.1. Ångbildning omöjliggör antagandet om osammantryckbarhet, som är en av förutsättningarna vid härledningen av energiekvationen.

Trots att ekv. 10.2.1 inte gäller i detta fall kommer det teoretiskt att kunna bli en avbördning, så länge y_s plus ångtrycket är mindre än atmosfärstrycket uttryckt i längden av vätskekolumnen.

I praktiken arbetar ej en hävert tillfredsställande om trycket vid översta punkten är nära ångtrycket. Luft och andra gaser i vätskan samlas där vid låga tryck och minskar därigenom längden på vätskepelaren till höger, som åstadkommer de låga trycken.

Stora hävertar, som arbetar kontinuerligt är utrustade med vakuumpumpar för bortförande av gaserna.

Exempel 10.3. Bestäm punkten för minimumtrycket i häverten i fig. 10.5 om mindre förluster försummas och rörlängden antas vara lika med det horisontella avståndet mellan reservoirlerna.

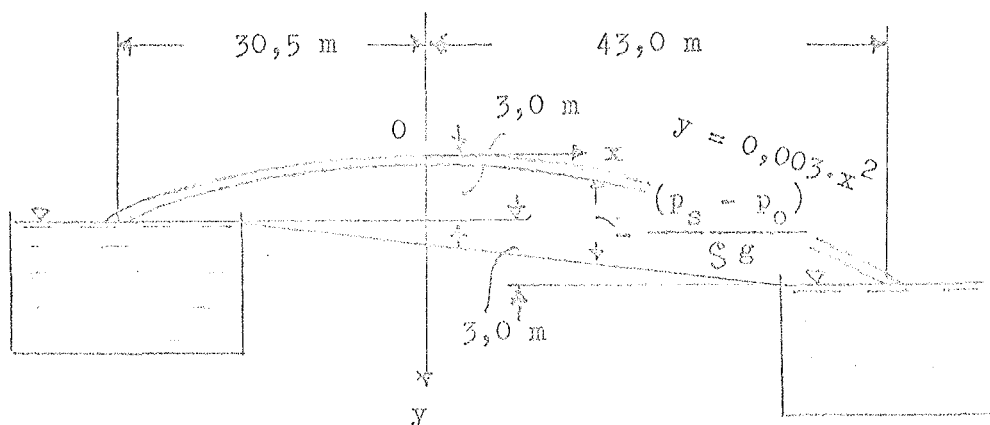


Fig. 10.5. Hävert mellan två reservoirlar.

När man försummar mindre förluster brukar man också bortse från termen

$v^2/2g$. Då blir trycklinjen en rak linje mellan de två vätskeytorna. Koordinaterna för två punkter på linjerna är $x_1 = -30,5$ m, $y_1 = 3,0$ m; $x_2 = 43,0$ m, $y_2 = 6,0$ m. Linjens ekvation blir efter substitution i ekv. $y = kx + l$

$$3,0 = -30,5 k + l$$

$$6,0 = 43,0 k + l$$

$$3,0 = 73,5 k; \quad k = 0,0408 \text{ och } l = 30,5 \cdot 0,0408 + 3,0 = 4,24$$

$$y = 0,0408 x + 4,24$$

Minimumtrycket uppträder där avståndet mellan trycklinjen och röret är i maximum. Alltså

$$\frac{p_s - p_o}{\rho g} = 0,003 x^2 - 0,0408 x - 4,24$$

För att finna minimum sättes $d(p_s - p_o/\rho g)/dx = 0$, som ger $0,006 x - 0,0408 = 0$, eller $x = 6,8$ och $p_s - p_o/\rho g = 0,006 \cdot 46,24 - 0,0408 \cdot 6,8 - 4,24 = 0,28 - 0,28 - 4,24 = -4,24$ m v.p.

Minimumpunkten uppkommer där ledningens och trycklinjens lutningar är lika

10.3 Rörledningar i serie

När två rörledningar av olika storlek eller olika skrovlighet är förbundna så att strömning sker från den ena rörledningen till den andra säges dessa vara kopplade i serie.

Ett typiskt problem, där tryckhöjden H sökes för en given avbördning eller vice versa illustreras i fig. 10.6.

Genom tillämpning av energiekvationen från A till B för ett referensplan genom B fås

$$0 + \frac{p_o}{\rho g} + H = 0 + \frac{p_o}{\rho g} + 0 + K_e \frac{v_1^2}{2g} + f_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} +$$

$$+ f_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Ur kontinuitetsekvationen har vi att

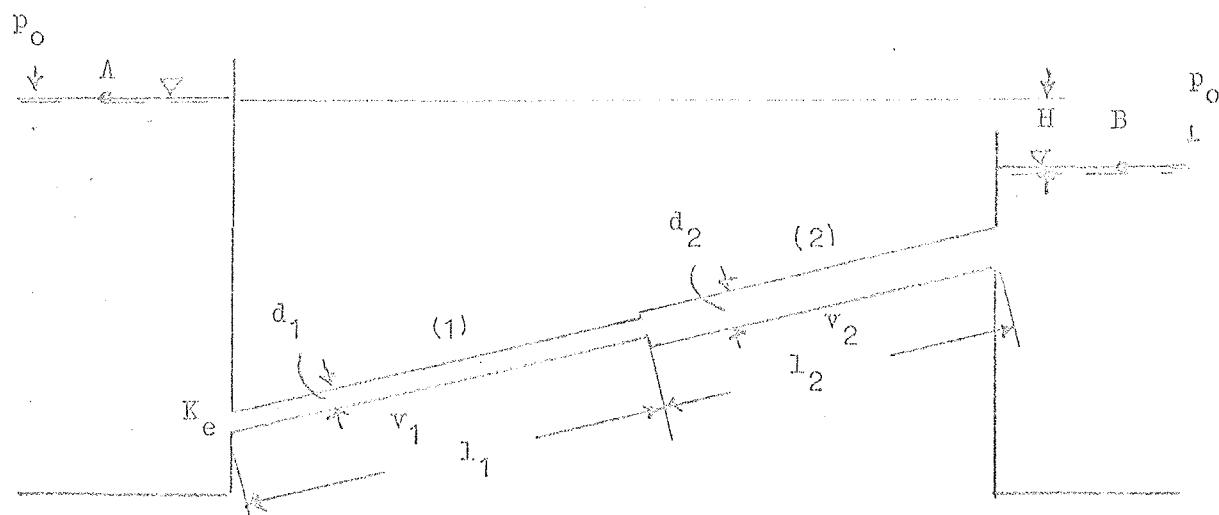


Fig. 10.6. Rörledningar kopplade i serie.

$$v_1 \cdot \frac{d_1^2}{4} = v_2 \cdot \frac{d_2^2}{4}$$

eller

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$$

Vi eliminerar v_2 i grundekvationen och erhåller

$$H = \frac{v_1^2}{2g} \left\{ K_e + f_1 \frac{l_1}{d_1} + \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]^2 + f_2 \frac{l_2}{d_2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 + \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}$$

För kända längder och dimensioner på rörledningarna reduceras ekvationen ovan till

$$H = \frac{v_1^2}{2g} (c_1 + c_2 f_1 + c_3 f_2) \quad 10.3.1$$

där c_1 , c_2 och c_3 är kända. Med avbördningen given kan Reynolds tal beräknas och värdena på f utvärderas ur Moodydiagrammet (del 1 avsnitt 6.8 sid. 181). Sedan fås H genom direkt substitution.

För givet H är v_1 , f_1 och f_2 okända i ekv. 10.3.1. Genom att anta värden på f_1 och f_2 fås v_1 genom passning, varefter Reynolds tal kan bestämmas och värden på f_1 och f_2 på nytt erhållas ur Moodydiagrammet. Genom att använda dessa nya värden kan ett riktigare v_1 -värde beräknas, osv.

Eftersom f varierar mycket litet med Reynolds tal går passningen mycket snabbt att utföra. Proceduren är tillämpbar på mera än två rörledningar i serie.

I stället för att åsätta värden på f_1 och f_2 för givet H kan en grafisk lösningsmetod användas. Olika värden på q antas i stället och motsvarande värden på H beräknas samt sätts i relation till q , som i fig. 10.7. Från den erhållna kurvan kan man sedan få ett riktigt värde på q för ett givet värde på H .

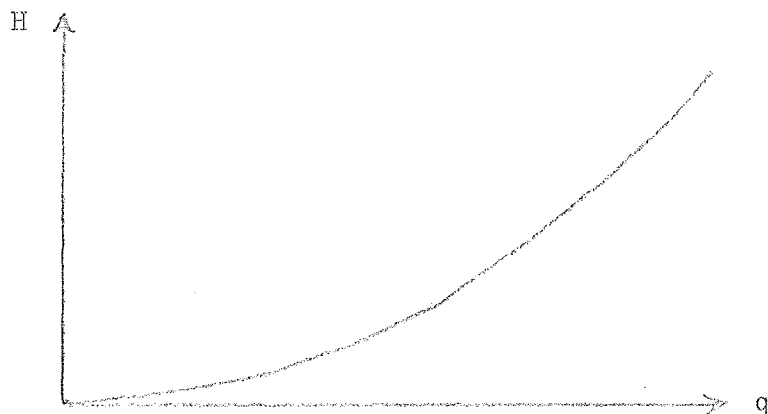


Fig. 10.7. Diagram med beräknade värden på H för valda värden på q .

Exempel 10.4. I fig. 10.6 är $K_e = 0,5$, $l_1 = 300$ m, $d_1 = 600$ mm, $k_1 = 1,5$ mm, $l_2 = 250$ m, $d_2 = 900$ mm, $k_2 = 0,3$ mm, $\nu = 0,00929 \cdot 10^{-4}$ m²/sek och $H = 6$ m. Bestäm avbördningen genom systemet.

Lösning: Från energiekvationen fås

$$6 = \frac{v_1^2}{2g} \left\{ 0,5 + f_1 \frac{300}{0,6} + \left[1 - \left(\frac{0,6}{0,9} \right)^2 \right]^2 + f_2 \frac{250}{0,9} \cdot \left(\frac{0,6}{0,9} \right)^4 + \left(\frac{0,6}{0,9} \right)^4 \right\}$$

Efter förenkling

$$6 = \frac{v_1^2}{2g} \left(0,5 + 500 f_1 + \frac{25}{81} + \frac{2500 \cdot 16}{9 \cdot 81} f_2 + \frac{16}{81} \right)$$

$$6 = \frac{v_1^2}{2g} (1,01 + 500 f_1 + 54,9 f_2)$$

Från $k_1/d_1 = 0,0015/0,6 = 0,0025$; $k_2/d_2 = 0,0003/0,9 = 0,00033$ antas värden på f för området med fullständig turbulens enligt fig. 6.7 sid. 181 del 1 (Moodydiagrammet).

$$f_1 = 0,025 \quad f_2 = 0,015$$

Lösning av v_1 med dessa värden ger $v_1 = 2,87$ m/sek; $v_2 = v_1 (d_1/d_2)^2 = 1,28$ m/sek

$$Re_1 = \frac{2,87 \cdot 0,6 \cdot 10000}{0,00929} = \frac{17220}{0,00929} = 1\,853\,000$$

$$Re_2 = \frac{1,28 \cdot 0,9 \cdot 10000}{0,00929} = \frac{11520}{0,00929} = 1\,240\,000$$

Moodydiagrammet ger för ovanstående Reynolds tal Re $f_1 = 0,025$ och $f_2 = 0,016$. Lösning, återigen med avseende på v_1 ger i stort samma värde som förut eller 2,85 m/sek.

Då fås till slut

$$q = 2,85 \cdot \pi \cdot 0,3^2 = 0,810 \text{ m}^3/\text{sek}$$

Ekvivalenta rörledningar

Rörledningar i serie kan dimensioneras enligt metoden med ekvivalenta längder.

Två rörledningssystem säges vara ekvivalenta, när samma tryckförluster ger samma avbördning i båda systemen.

Från ekv. 10.1.1 och kontinuitetsekv.

$$h_{f1} = f_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = f_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{q_1^2}{(\pi d_1^2/4)^2 2g} = \frac{f_1 \cdot l_1}{d_1^5} \cdot \frac{8 q_1^2}{\pi^2 g}$$

och

$$h_{f2} = \frac{f_2 \cdot l_2}{d_2^5} \cdot \frac{8 q_2^2}{\pi^2 g}$$

För att de två rörledningarna skall vara ekvivalenta gäller att

$$h_{f1} = h_{f2} ; \quad q_1 = q_2$$

Insättning av $h_{f1} = h_{f2}$ ger efter förenkling

$$\frac{f_1 \cdot l_1}{d_1^5} = \frac{f_2 \cdot l_2}{d_2^5}$$

Vi löser ekv. ovan med avseende på l_2 och får

$$l_2 = l_1 \cdot \frac{f_1}{f_2} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^5 \quad 10.3.2$$

Ekv. 10.3.2 bestämmer den ekvivalenta längden av ledning nummer 2 i förhållande till ledning nummer 1.

Till exempel. För att ersätta 300 m av en 200 mm ledning med en ekvivalent längd av en 150 mm ledning måste värdena på f_1 och f_2 skattas genom att välja en önskad avbördning. Om f_1 sättes till 0,020 och f_2 till 0,018 då fås enl. ekv. 10.3.2

$$l_2 = 300 \cdot \frac{0,020}{0,018} \cdot \left(\frac{0,15}{0,20}\right)^5 = \frac{1000}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 80 \text{ m}$$

Exempel 10.5. Lös exempel 10.4 med hjälp av ekvivalenta rörlängder.

Lösning: Först uttrycks de mindre förlusterna i termer av ekvivalenta längder.

För rörledning 1 fås

$$K_1 = 0,5 + \left[1 - \left(\frac{0,6}{0,9}\right)^2 \right]^2 = 0,809$$

$$l_{e1} = \frac{K_1 \cdot d_1}{f_1} = \frac{0,809 \cdot 0,6}{0,025} = 19,5 \text{ m}$$

För rörledning 2 fås

$$K_2 = 1$$

$$l_{e2} = \frac{K_2 \cdot d_2}{f_2} = \frac{1 \cdot 0,9}{0,015} = 60 \text{ m}$$

Värdena på f_1 och f_2 är skattade inom det helt turbulenta området. Problemet är nu reducerat till 320 m av 600 mm ledning och 310 m av 900 mm ledning. Genom att uttrycka 900 mm ledningen i termer av ekvivalent längd 600 mm ledning enligt ekv. 10.3.2 fås

$$l_e = 310 \cdot \frac{0,015}{0,025} \cdot \left(\frac{0,6}{0,9}\right)^5 = 24,5 \text{ m}$$

Med tillägg av 600 mm ledningen begränsas problemet till att finna avbördningen genom $320 \text{ m} + 25 \text{ m} = 345 \text{ m}$ av 600 mm ledning. $k = 1,5 \text{ mm}$ för en tryckförlust av 6 m. Då fås

$$6 = f \cdot \frac{345}{0,6} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Med $f = 0,025$, $v = 2,87 \text{ m/sek}$ och $Re = 2,87 \cdot 0,6/0,00929 \cdot 10^{-4} \approx 1\,900\,00$
För $k/d = 0,0025$, $f = 0,025$ och $q = 2,87 \cdot \pi \cdot 0,3^2 = 0,8 \text{ m}^3/\text{sek}$.

10.4 Parallella rörledningar

Fig. 10.8 visar ett system med parallella ledningar.

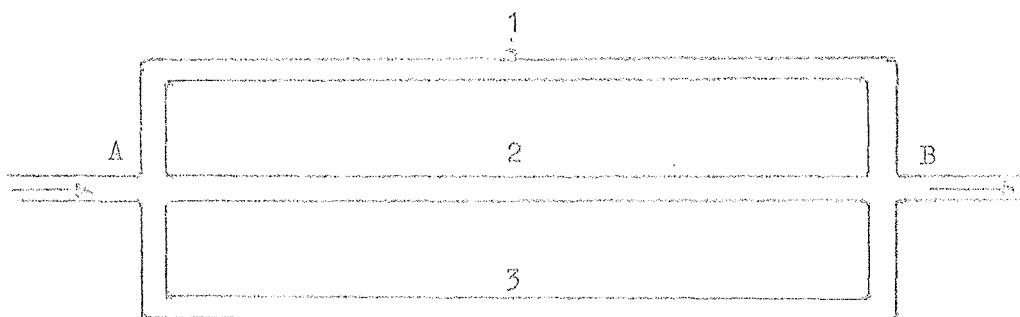


Fig. 10.8. System med parallella rörledningar.

Kopplade i serie strömmar samma mängd vätska genom alla ledningarna och tryckförlusterna är kumulativa. För ett system med parallella ledningar gäller, att tryckförlusterna är desamma i vilken som helst av ledningarna, medan avbördningarna är kumulativa.

Vid studier av system med parallella ledningar antas de mindre förlusterna adderade till längden på varje rörledning som ekvivalenta längder. I fig. 10.8 måste följande relationer gälla

$$h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} = \frac{p_A}{\rho g} + z_A - \left(\frac{p_B}{\rho g} + z_B \right)$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

där z_A , z_B är nivån hos punkterna A och B, och q är avbördningen från ingående eller utgående ledning.

Två fall av problem förekommer: (1) där nivån hos trycklinjen över punkterna A och B är känd varvid avbördningen q sökes; (2) med q känd och där strömningens fördelning och tryckförlusterna sökes. Rörledningarnas dimensioner, skrovligheten och strömningens egenskaper i övrigt antas vara bekanta.

Det första fallet blir ett rent avrinningsproblem eftersom tryckförlusten anger fallet för trycklinjen. Avbördningarna summeras för att få totala avbördningen.

Det andra fallet är mera komplext, eftersom varken tryckförlusten eller avbördningen är känd för någon av ledningarna. Följande procedur rekommenderas.

1. Antag en avbördning q_1^i genom rörledning 1
2. Lös med avseende på h_F^i med användning av den antagna avbördningen
3. Med användning av h_F^i sök q_2^i , q_3^i
4. Med utgångspunkt från de tre värdena på avbördningarna för en gemensam tryckförlust, antas det givna q uppdelat på rörledningarna i samma proportioner som q_1^i , q_2^i , q_3^i . Således

$$q_1 = \frac{q_1^i}{\sum q^i} q \quad q_2 = \frac{q_2^i}{\sum q^i} q \quad q_3 = \frac{q_3^i}{\sum q^i} q \quad 10.4.2$$

5. Kontrollera riktigheten hos dessa avbördningar genom att beräkna h_{F1} , h_{F2} , h_{F3} för q_1 , q_2 och q_3 .

Exempel 10.6. I fig. 10.8 är $l_1 = 900$ m, $d_1 = 300$ mm, $k_1 = 0,3$ mm; $l_2 = 600$ m, $d_2 = 200$ mm, $k_2 = 0,03$ mm; $l_3 = 1200$ m, $d_3 = 400$ mm, $k_3 = 0,24$ mm. $Q = 1030$ kg/m³, $\nu = 0,0279 \cdot 10^{-4}$ m²/sek, $p_A = 5,5$ bar, $z_A = 30$ m, $z_B = 25$ m.

För en total avbördning av $0,340$ m³/sek bestäm flödet genom varje ledning och trycket i B.

Lösning: Vi antar $q_1^i = 0,085$ m³/sek. Då blir $v_1^i = 1,20$ m/sek, $Re_1^i = 1,2 \cdot 0,3 / 0,0279 \cdot 10^{-4} = 129\,000$, $k_1/d_1 = 0,001$, $f_1^i = 0,022$ (ur Moody-

diagrammet) och

$$h'_{f_1} = 0,022 \cdot \frac{900}{0,3} \cdot \frac{1,2^2}{19,62} = 4,85 \text{ m}$$

För ledning 2

$$4,85 = f'_2 \cdot \frac{600}{0,2} \cdot \frac{(v'_2)^2}{2g}$$

Då blir $k_2/d_2 = 0,03/200 = 0,00015$. Antag $f'_2 = 0,020$; då är v'_2 enl. ekv. ovan lika med 1,26 m/sek, $Re'_2 = 1,26 \cdot 0,2/0,0279 \cdot 10^{-4} = 90\ 300$. Moody-diagrammet ger nu $f'_2 = 0,019$, $v'_2 = 1,29$ m/sek, $q'_2 = 0,0405 \text{ m}^3/\text{sek}$.

För ledning 3

$$4,85 = f'_3 \cdot \frac{1200}{0,4} \cdot \frac{(v'_3)^2}{2g}$$

Då är $k_3/d_3 = 0,24/400 = 0,0006$. Vi antar $f'_3 = 0,020$; då blir $v'_3 = 1,26$ m/sek, $Re'_3 = 1,26 \cdot 0,4/0,0279 \cdot 10^{-4} = 180\ 600$, $f'_3 = 0,020$, $q'_3 = 0,158 \text{ m}^3/\text{sek}$.

$$q' = 0,085 + 0,0405 + 0,158 = 0,284 \text{ m}^3/\text{sek}$$

Då fås

$$q_1 = \frac{0,085}{0,284} \cdot 0,340 = 0,102 \quad q_2 = \frac{0,041}{0,284} \cdot 0,340 = 0,049$$

$$q_3 = \frac{0,158}{0,284} \cdot 0,340 = 0,189$$

Kontroll av värdena på h_{f_1} , h_{f_2} , h_{f_3} ger

$$v_1 = \frac{0,102}{\pi \cdot 0,15^2} = 1,44; \text{Re}_1 = 154\ 800; f_1 = 0,022; h_{f_1} = 6,98 \text{ m}$$

$$v_2 = \frac{0,049}{\pi \cdot 0,1^2} = 1,56; \text{Re}_2 = 111\ 800; f_2 = 0,019; h_{f_2} = 7,07 \text{ m}$$

$$v_3 = \frac{0,189}{\pi \cdot 0,2^2} = 1,50; \text{Re}_3 = 215\ 200; f_3 = 0,019; h_{f_3} = 6,54 \text{ m}; \bar{M} = 6,86$$

För erhållande av p_B

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + h_f$$

eller

$$\frac{p_B}{\rho g} = \frac{550000}{9810} + 30 - 25 - 6,86 = 56,06 - 1,86 = 54,2 \text{ m} = 5,32 \text{ bar}$$

10.5 Slutna ledningar med icke cirkulära tvärsektioner

Enligt del 1 avsnitt 5.5 (sid. 156) kan rördiametern i uttrycket för Reynolds kritiska tal $v_{krit} d/\nu$ för annat tvärsnitt och öppna kanaler utbytas mot $4 R_h$, där R_h är hydrauliska radien.

Vi kan då teckna uttrycken

$$h_f = f \cdot \frac{1}{4 R_h} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad Re = \frac{v \cdot 4 R_h}{\nu} \quad \frac{k}{d} = \frac{k}{4 R_h} \quad 10.5.1$$

Moodydiagrammet tillämpas som förut. Ekv. 10.7.1 visar sig ej gälla för oregelbundna tvärsnitt, men ger användbara värden för kvadrater, ovaler, trianglar och liknande sektioner.

Exempel 10.7. Bestäm tryckfallet i m vattenpelare, som fordras för att en luftström av $280 \text{ m}^3/\text{min}$ vid en temperatur av 16°C och vid ett absolut tryck av 1 atm. skall strömma genom en rektangulär galvaniserad plåttrumma 0,6 m bred, 0,3 m hög och 60 m lång. $k = 0,3 \text{ mm}$; $\rho_{\text{luft}} = 1,222 \text{ kg/m}^3$; $\nu_{\text{luft}} \text{ vid } +16^\circ\text{C} = 0,107 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sek}$; $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Lösning: Vi har att $R_h = \frac{\text{arean}}{\text{perimetern}} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,6} = 0,1 \text{ m}$.

$$\frac{k}{4 R_h} = \frac{0,0003}{4 \cdot 0,1} = 0,00075$$

För \tilde{v} fås

$$\frac{280}{60 \cdot 0,6 \cdot 0,3} = \frac{280}{10,8} = 25,93 \text{ m/sek.}$$

$$Re = \frac{\bar{v} \cdot 4 R_h}{\nu} = \frac{25,93 \cdot 4 \cdot 0,1 \cdot 10^4}{0,107} = 9,7 \cdot 10^5$$

Moodydiagrammet ger för $Re = 9,7 \cdot 10^5$ och $k/d = k/4 R_h = 0,00075$, $f = 0,019$.

Då fås för h_f

$$h_f = f \cdot \frac{1}{4 R_h} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} = \frac{0,019 \cdot 60 \cdot 25,93^2}{4 \cdot 0,1 \cdot 19,62} = 97,67 \text{ m luft}$$

Tryckfallet i m vattenpelare blir då

$$1000 \cdot g \cdot h = 1,222 \cdot g \cdot 97,67$$

eller

$$h = \frac{1,222 \cdot 97,67}{1000} = \underline{\underline{0,12 \text{ m}}}$$

11. Stationär strömning i öppna ledningar

11.1 Klassifikation av strömning i öppna ledningar

Strömning i öppna ledningar uppträder i en stor mängd former, från avrinningen över ytan av ett plöjt fält under ett kraftigt regn till strömningen i stora kanaler.

Den kan klassificeras som stationär, icke stationär, likformig eller olikformig.

Stationär likformig strömning förekommer i mycket långa kanaler med konstanta tvärsektioner, i sådana avsnitt där den "terminala hastigheten" har uppnåtts, dvs. där tryckförlusterna beroende på den turbulenta strömningen är exakt kompenserade av reduktionen i lägesenergi beroende på den likformiga minskningen av kanalbottnens höjdnivå.

Det konstanta djupet vid stationär likformig strömning kallas normaldjupet.

Vid stationär likformig strömning är avbördningen konstant och djupet också konstant längs kanalen.

Som framgått av avsnitt 6.7 är flera ekvationer i allmän användning vid bestämningen av sambandet mellan medelhastigheten, tvärsektionen, dennas storlek samt skrovligheten och fallet hos en kanalbotten.

Stationär olikformig strömning uppträder i varje oregelbunden kanal, vari avbördningen ej ändras med tiden. Den förekommer alltså i regelbundna kanaler, där vattendjupet och därmed också medelhastigheten varierar från en tvärsektion till en annan.

Vid gradvisa förändringar i djup eller i tvärsektion, benämnd olikformig (varierad) stationär strömning, finns metoder, t.ex. genom numerisk integration, att beräkna vattendjup för kända avbördningar, kanaldimensioner och skrovlighet samt för givna förhållanden i en tvärsektion. Här används också modellstudier. Vattensprånget är ett exempel på stationär olikformig strömning. Det har diskuterats i del 1 sektion 4.12 sid. 132-134 och det kommer att ytterligare behandlas i avsnitt 11.3.

Ej stationär likformig strömning är sällsynt i öppna kanaler.

Ej stationär olikformig strömning är allmänt förekommande men är mycket svår att analysera. Vågörelser är exempel på dylik strömning.

Strömning kan också klassificeras som strömmande eller stråkande. När den har så låg hastighet, att en liten störning kan föras uppströms och således förändra förhållandena där (Froudes tal $F = v / \sqrt{g l} < 1$) säges den vara strömmande.

När hastigheten är så hög, att en liten störning t.ex. en elementarvåg föres nedströms beskrives strömningen som stråkande ($F = v / \sqrt{g l} > 1$).

I det första fallet kontrolleras strömningen av nedströmsförhållanden, i det andra av uppströmsförhållanden.

Om hastigheten är precis så stor, som den hos en elementarvåg $v = \sqrt{g l}$ eller $F = 1$, då säges strömningen vara kritisk.

Hastighetsfördelningen

Hastigheten vid en fast gränsyta måste var lika med noll, och vid strömning i öppna ledningar ökas den vanligen med avståndet från gränsytan. Maximumvärdet kommer i allmänhet ej att ligga i den fria vätskeytan utan under densamma på ett avstånd av 0,05 till 0,25 av vätskedjupet.

Medelhastigheten längs en vertikallinje bestämmes ofta som hastigheten vid 6/10 av djupet. Ett mera noggrant värde fås genom att ta medelvärdet av hastigheterna vid 2/10 och 8/10 av djupet.

11.2 Fördelaktigaste kanaltvårsnittet

Några former av kanaltvårsnitt är mera lämpliga än andra vid en given avbördning, då också fall och skrovlighetsfaktor är bestämda.

Med hjälp av Gauckler-Hagen-Stricklers formel kan visas, att om tvärsektionsarean är i minimum så är den våta perimetern också i minimum.

Det fördelaktigaste tvärsnittet är det, som har den minsta våta perimetern eller dess ekvivalent minimiytan för respektive sektionstyp.

Gauckler-Hagen-Stricklers formel lyder, som vi redan anført i avsnitt 6.7

$$\bar{v} = C \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

eller

$$q = C \cdot A \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

11.2.1

där q är flödet, A det våta tvärsnittet, R_h hydrauliska radien (våta tvärsnittet A dividerat med våta perimetern p), I fallet och C en proportionalitetskoefficient.

Med q , C och I kända kan ekv. 11.2.1 skrivas

$$A = C_1 \cdot p^{\frac{2}{5}}$$

11.2.2

där C_1 också är bekant. Ekvationen anger att p är i minimum när A är i minimum.

För att finna fördelaktigaste tvärsnittet för en rektangulär kanal (fig. 11.1) sättes $p = b + 2 y$ och $A = b y$.

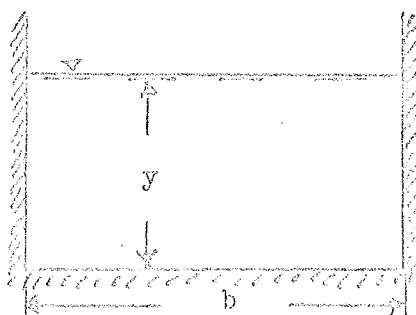


Fig. 11.1. Rektangulär tvärsektion.

Då blir efter eliminering av b

$$A = b \cdot y = (p - 2 y) y = C_1 p^{\frac{2}{5}}$$

Värdet på y sökes för vilket p är i minimum. Derivering med avseende på y ger

$$\left(\frac{dp}{dy} - 2\right) y + p - 2 y = \frac{2}{5} C_1 p^{-\frac{3}{5}} \cdot \frac{dp}{dy}$$

Vi sätter $dp/dy = 0$ och får

$$-2 y + p - 2 y = 0$$

eller

$$p = 4 y$$

Eftersom $p = b + 2 y$ har vi till slut att

$$b = 2 y$$

11.2.3

Alltså är djupet hälften av bottenbredden oberoende av storleken på det rektangulära tvärsnittet.

Det fördelaktigaste trapetsformade tvärsnittet (fig. 11.2) fås enligt följande.

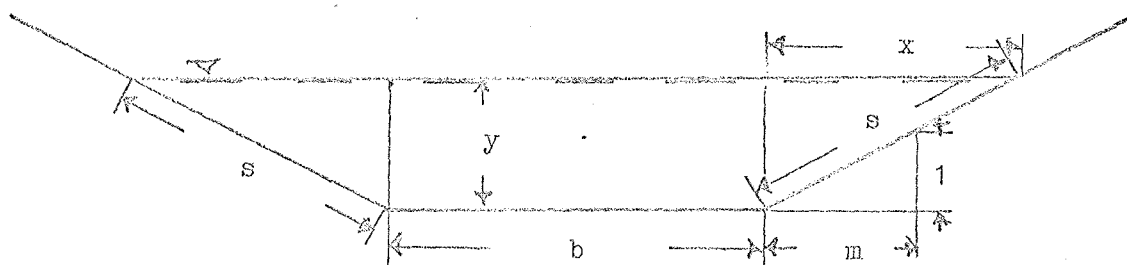


Fig. 11.2. Trapetsformad tvärsektion.

Enligt fig. 11.2 har vi att $A = b y + m y^2$ ($A = b y + 2 xy/2 = by + xy$). Likformighet ger $x/y = m/1$ eller $x = y m$. Alltså: $A = b y + m y^2$, $p = b + 2 y \sqrt{1 + m^2}$ (Pytagoras sats ger: $2 s = 2 \sqrt{y^2 + x^2} = 2 \sqrt{y^2 + y^2 m^2} = 2 y \sqrt{1 + m^2}$).

Efter eliminering av b och A i ekvationerna ovan och ekv. 11.2.2 erhålles

$$A = b y + m y^2 = (p - 2 y \sqrt{1 + m^2}) y + m y^2 = C_1 p^{\frac{2}{5}} \quad 11.2.4$$

Vi håller m konstant, deriverar med avseende på y samt sätter $\partial p / \partial y$ lika med noll och får

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} - 2 \sqrt{1 + m^2} \right) y + (p - 2 y \sqrt{1 + m^2}) + 2 m y = \frac{2}{5} C_1 p^{-\frac{3}{5}} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 - 2 y \sqrt{1 + m^2} + p - 2 y \sqrt{1 + m^2} + 2 m y = 0$$

$$p = 4 y \sqrt{1 + m^2} - 2 m y \quad 11.2.5$$

Med y konstant, deriveras ekv. 11.2.5 med avseende på m och $\partial p / \partial m$ sättes lika med noll. Då erhålles

$$p = 4 y (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} - 2 m y$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = 2 y (1 + m^2)^{-\frac{1}{2}} - 2 m - 2 y = 0$$

$$\frac{2 m}{\sqrt{1 + m^2}} = 1$$

Efter lösning med avseende på m

$$4 m^2 = 1 + m^2 ; \quad 3 m^2 = 1 ; \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Substitution av m i ekv. 11.2.5 ger

$$p = 4 y \sqrt{1 + \frac{3}{9}} - \frac{2 \sqrt{3}}{3} y = \frac{4 \sqrt{12}}{3} - \frac{2 \sqrt{3}}{3}$$

$$p = 2 \sqrt{3} y ; \quad b = \frac{2 \sqrt{3}}{3} y ; \quad A = \sqrt{3} y^2 \quad 11.2.6$$

Av ovanstående ekvationer framgår att $b = p/3$, vilket också visar, att slänterna har samma längd som bottenbredden.

Eftersom $\cot m$ är 30° blir det fördelaktigaste tvärsnittet en halv sexhörning.

För trapetsformade tvärsnitt med m specificerat (maximala släntlutningen då rasrisk föreligger) kan ekv. 11.2.5 användas för att finna den bästa relationen mellan bottenbredd och djup.

Halvcirkeln är det fördelaktigaste tvärsnittet för alla öppna ledningar.

Exempel 11.1. Bestäm bottenbredden på den kanal med fördelaktigaste trapetsformade tvärsnitt, som skall avbörda $1,5 \text{ m}^3/\text{sek}$ vid ett fall av 0,9:1000. $C = 35$ i Gauckler-Hagen-Stricklers formel.

Lösning: Vi har från ekv. 11.2.6 att

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\sqrt{3} y^2}{2 \sqrt{3} y} = \frac{y}{2}$$

Substitution i ekv. 11.2.1 ger

$$1,5 = 35 \sqrt{3} y^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 0,0009^{\frac{1}{2}}$$

eller

$$y^{\frac{8}{3}} = \frac{1,5}{35 \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 0,03} = 0,52$$

$$y = 0,78 \text{ m}$$

$$\text{Från ekv. 11.2.6} \quad b = \frac{2 \sqrt{3}}{3} y = \frac{2 \sqrt{3} \cdot 0,78}{3} = 0,90 \text{ m}$$

11.3 Vattensprång

Det samband, som föreligger mellan variablerna \bar{v}_1, y_1 och \bar{v}_2, y_2 vid uppkomsten av ett vattensprång i en horisontell kanal, har förut utvecklats i del 1 avsnitt 4.12 sid. 132-134.

Ett annat sätt att bestämma de konjugerade djupen för en given avbördning är att använda den s.k. F + M-metoden.

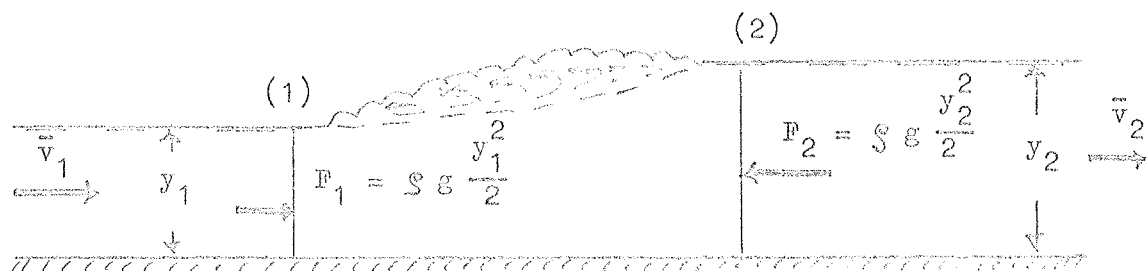


Fig. 11.3. Vattensprång i en horisontell rektangulär kanal.

Rörelsemängdsekv. 4.12.17 i del 1 sid. 133 tillämpad på den "fria kroppen" av vätska mellan (1) och (2) i fig. 11.3 ger per bredd- och tidsenhet ($\bar{v}_1 y_1 = \bar{v}_2 y_2 = q$)

$$\frac{\rho g y_1^2}{2} - \frac{\rho g y_2^2}{2} = \rho q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \rho \bar{v}_2^2 y_2 - \rho \bar{v}_1^2 y_1$$

Vi omgrupperar och får

$$\frac{\sum g y_1^2}{2} + \sum \frac{v_1^2}{y_1} = \frac{\sum g y_2^2}{2} + \sum \frac{v_2^2}{y_2} \quad 11.3.1$$

eller

$$F_1 + M_1 = F_2 + M_2 \quad 11.3.2$$

där F representerar den hydrostatiska kraften i tvärsektionen och M är den rörelsemängd, som per tidsenhet passerar sektionen.

Genom att skriva $F + M$ för ett givet flöde q per breddenhet

$$F + M = \frac{\sum g y^2}{2} + \frac{\sum q^2}{y} \quad 11.3.3$$

kan en avsättning göras med $F + M$ som abscissa och med y som ordinata. Kurvans principiella förlopp framgår av fig. 11.4.

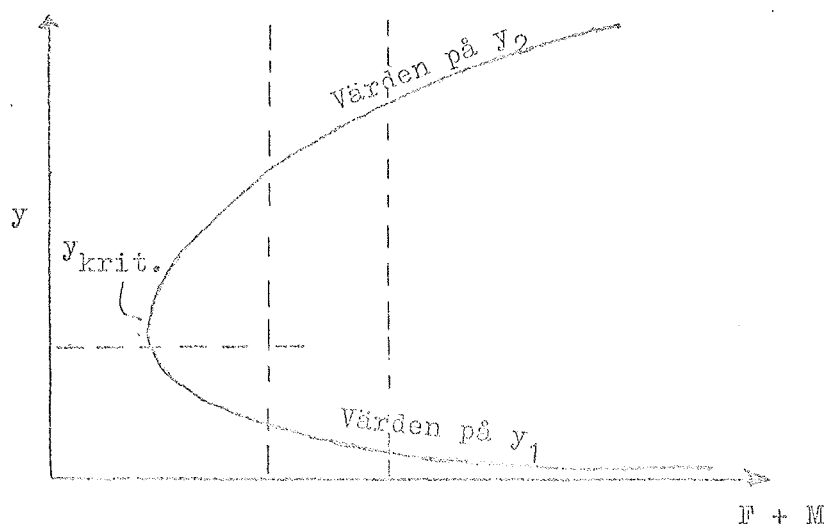


Fig. 11.4. $F + M$ kurva för ett vattensprång.

Som framgår av fig. 11.4 skär en godtycklig linje kurvan i två punkter, som har samma värde på $F + M$, alltså är djupen konjugerade.

Värdet på y för $F + M$ i minimum fås genom differentiering av ekv. 11.3.3 med avseende på y och sättning av $d(F + M)/dy$ lika med noll, eller

$$y_{\text{krit}} = \sqrt[3]{\frac{3}{g} \frac{q^2}{2}} \quad 11.3.4$$

Vattensprånget måste alltså uppstå vid ett djup mindre än värdet i ekv. 11.3.4 och nå ett djup, som är större än detta värde. Djupet benämnes

det kritiska djupet, och det skall visas i följande avsnitt, att det är djupet för minsta specifika energien. Vattensprånget går alltid från stråkande till strömmande vattenrörelse.

De konjugerade djupen står i direkt samband med Froudes tal före och efter vattensprånget

$$F_1 = \frac{\bar{v}_1^2}{g y_1} \qquad F_2 = \frac{\bar{v}_2^2}{g y_2} \qquad 11.3.5$$

Kontinuitetsekvationen ger

$$\bar{v}_1^2 y_1^2 = F_1 g y_1^3 = \bar{v}_2^2 y_2^2 = F_2 g y_2^3$$

eller

$$F_1 y_1^3 = F_2 y_2^3 \qquad 11.3.6$$

Ekv. 11.3.1 kan omskrivas till

$$y_1^2 + 2 \frac{\bar{v}_1^2 y_1}{g} = y_2^2 + \frac{\bar{v}_2^2 y_2}{g}$$

eller

$$y_1^2 \left(1 + 2 \frac{\bar{v}_1^2}{g y_1}\right) = y_2^2 \left(1 + 2 \frac{\bar{v}_2^2}{g y_2}\right)$$

Efter substitution från ekv. 11.3.5 och 11.3.6 erhålles

$$(1 + 2 F_1) F_1^{-2/3} = (1 + 2 F_2) F_2^{-2/3} \qquad 11.3.7$$

Värdet på F_2 i termer av F_1 fås från ekv. 4.12.9 sid.

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + 2 \frac{\bar{v}_1^2 y_1}{g}}$$

eller

$$2 \frac{y_2}{y_1} = -1 + \sqrt{1 + 8 \frac{\bar{v}_1^2}{g y_1}}$$

Genom att använda ekv. 11.3.5 och 11.3.6 erhålles till slut

$$F_2 = \frac{8 F_1}{(\sqrt{1 + 8 F_1} - 1)^3} \quad 11.3.8$$

Froudes tal är alltid större än ett före ett vattensprång; efter ett dylikt alltid mindre än ett.

11.4 Specifik energi, kritiskt djup

Energien per massenhet E med referensnivån vid kanalens botten benämnes den specifika energien (Bakhmeteff 1911). Den räknas vertikalt och vi får ekvationen

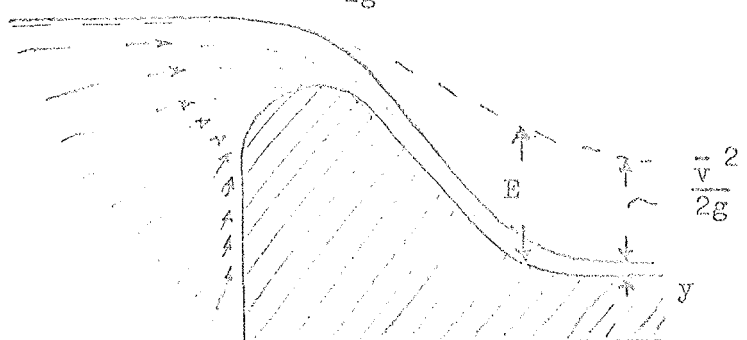
$$E = y + \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 11.4.1$$


Fig. 11.5. Illustration till specifik energi.

Fig. 11.5 illustrerar specifik energien i en rektangulär kanal, där q är flödet per breddenhet med $\bar{v} = q/y$ och

$$E = y + \frac{1}{2g} \left(\frac{q}{y} \right)^2 \quad 11.4.2$$

eller

$$q = \sqrt{2g (y^2 E - y^3)} \quad 11.4.3$$

Ekvationerna 11.4.2 och 11.4.3 ger relationerna mellan specifik energi, flöde och djup. För underlättande av förståelsen av dessa samband hålles: (1) q konstant, varvid studeras förhållandet mellan E och y ; (2) E kon-

stant för undersökning av sambandet mellan q och y . Avsättning i diagram av dessa relationer ger specifika energidiagrammet (fig. 11.6a) och flödeskurvan (fig. 11.6b).

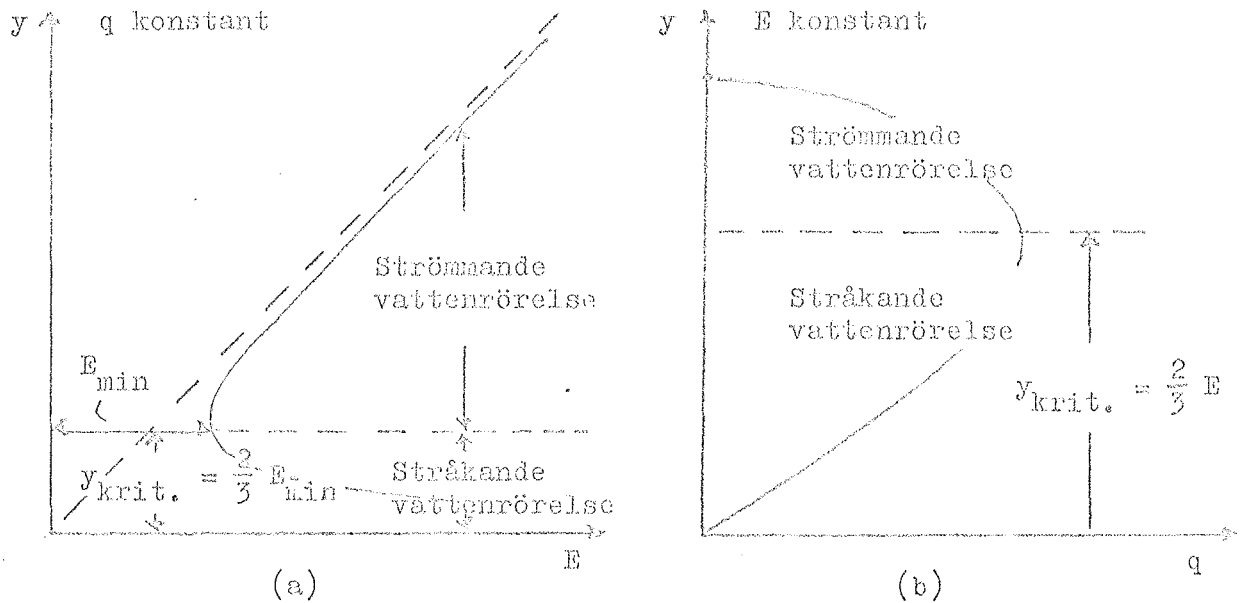


Fig. 11.6. Specifika energien och flödet i kanaler med rektangulärt tvärsnitt. (a) Specifika energien för givet flöde och varierande djup; (b) flödet för given specifik energi och varierande djup.

Eftersom kurvorna i fig. 11.6 a och b visar två olika sätt att illustrera en och samma ekvation kan det förväntas, att punkterna för minimum av E och maximum av q är ekvivalenta.

Djupet, som är förbundet med dessa punkter benämnes det kritiska djupet, $y_{krit.}$ (jfr del 2 sid. 80).

$y_{krit.}$ bildar vid strömning i öppna kanaler en gräns mellan två strömningsszoner, som är mycket olika till karaktären. Sker en strömning vid ett djup större än det kritiska är vattenrörelsen strömmande; äger den förströmda rum vid ett djup mindre än $y_{krit.}$ är vattnets rörelse stråkande.

Diagramformen i fig. 11.6a anger, att två djup- och därmed också två strömningssituationer - i allmänhet är möjliga vid en given specifik energi; en med strömmande och en med stråkande vattenrörelse. Dessa två djup är kända som de s.k. alternativa djupen.

Värdet på y för minimum av E fås genom att sätta dE/dy lika med noll med

hjälp av ekv. 11.4.2 samtidigt som q hålles konstant, dvs.

$$\frac{dE}{dy} = 0 = 1 - \frac{q^2}{g y^3}$$

som ger

$$y_{\text{krit.}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad 11.4.4$$

eller

$$q = \sqrt{g y_{\text{krit.}}^3} \quad 11.4.5$$

Värdet på y för minimum av q erhålles på samma sätt genom att sätta dq/dy lika med noll med hjälp av ekv. 11.4.3 samtidigt som E hålles konstant. Alltså

$$\frac{dq}{dy} = 0 = \frac{2y E - 3y^2}{\sqrt{y^2 E - y^3}}$$

som ger

$$y_{\text{krit.}} = \frac{2 E_{\text{min}}}{3} \quad 11.4.6$$

eller

$$E_{\text{min}} = \frac{3 y_{\text{krit.}}}{2} \quad 11.4.7$$

Substitution av ekv. 11.4.6 i ekv. 11.4.3 ger $q = \sqrt{g y_{\text{krit.}}^3}$, liksom i ekv. 11.4.5, vilket visar, att punkterna för minimum av E och maximum av q är ekvivalenta.

Av stor betydelse är det förhållandet att enligt ekv. 11.4.4 och 11.4.5 är det kritiska djupet endast beroende av flödet.

Den kritiska hastigheten, dvs. strömingshastigheten vid det kritiska djupet fås ur kontinuitetskvationen och ekv. 11.4.5. Vi har alltså att

$$q = \bar{v}_{\text{krit.}} \cdot y_{\text{krit.}} \quad \text{och} \quad q = \sqrt{g y_{\text{krit.}}^3}$$

som ger

$$\bar{v}_{\text{krit.}} = \sqrt{g y_{\text{krit.}}} \quad 11.4.8$$

Ekv. 11.4.8 överensstämmer med en annan relation använd vid strömning i öppna ledningar, nämligen

$$\bar{v} = \sqrt{g y} \quad 11.4.9$$

som anger förflyttningshastigheten hos en liten våg på ytan av en vätska med djupet y .

Överensstämmelsen hos dessa ekvationer gör det möjligt att bestämma strömmande eller stråkande vattenrörelser i öppna ledningar.

Vid strömmande och stråkande vattenrörelser är hastigheten mindre än, respektive större än, $\sqrt{g y}$.

Detta förhållande medför, att vid strömmande vattenrörelse rör sig små vågor uppströms, medan vid stråkande vattenrörelse dessa förflyttar sig nedströms med en viss vinkel β till strömningsriktningen (fig. 11.7).

För att sådana vågor skall förbli stationära måste deras förflyttningshastighetskomponent (uppströms) vara exakt lika stor och motsatt riktad till strömningshastigheten \bar{v} , varför $\sin \beta = \sqrt{g y} / \bar{v}$.

Med hjälp av detta samband kan approximativa uppskattningar av hastigheten - och därmed också av flödet - göras ur enkla mätningar av vågvinkel, vattendjup och kanalbredd.

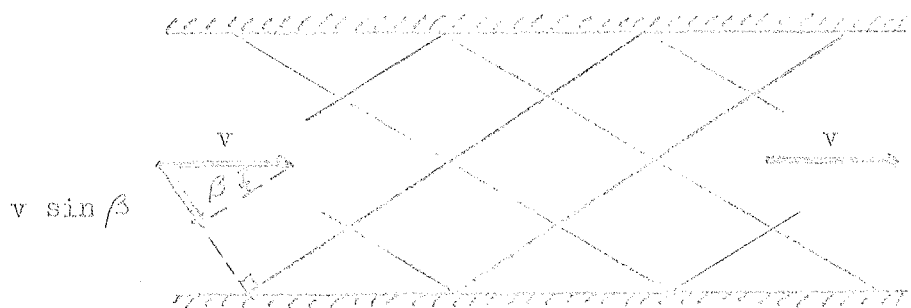


Fig. 11.7. Illustration till stråkande vattenrörelse.

Eftersom vågfenomen kan karakteriseras genom sambandet mellan tröghets- och tyngdkrafter är det möjligt att beskriva förhållandet vid det kritiska

djupet i termer av Froudes tal.

Enligt det föregående har vi att Froudes tal $F = v / \sqrt{g y}$. Då fås för strömmande vattenrörelse: $F < 1$, vid det kritiska djupet: $F = 1$, för stråkande vattenrörelse: $F > 1$ (se också del 2 avsnitt 11.2 sid. 74) och till slut sin $= 1/F$.

För tvärsnitt av godtycklig form, som i fig. 11.8, kan uttrycket för specifika energien skrivas

$$E = y + \frac{1}{2g} \left(\frac{q}{A} \right)^2 \quad 11.4.10$$

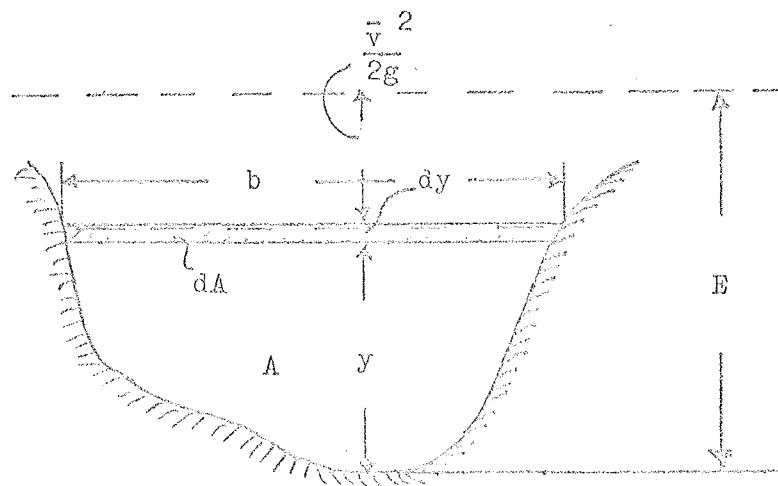


Fig. 11.8. Specifika energien i ett tvärsnitt av godtycklig form.

Här är A en funktion av y , beroende av tvärsnittets utseende. Ekv. 11.4.10 får då formen

$$E = y + \frac{1}{2g} \left[\frac{q}{f(y)} \right]^2 \quad 11.4.11$$

Ekvationen ger, liksom ekv. 11.4.2, ett specifikt energidiagram och en flödeskurva (fig. 11.9), vilka har ett utseende likt dem i fig. 11.6, men som visar helt andra samband vad beträffar det kritiska djupet. Dessa kan härledas för en godtycklig tvärsektion genom differentiering av ekv. 11.4.10 med avseende på y vid konstant q och sättning av resultatet lika med noll.

$$\frac{dE}{dy} = 1 + \frac{q^2}{2g} \left(- \frac{2}{A^3} \cdot \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

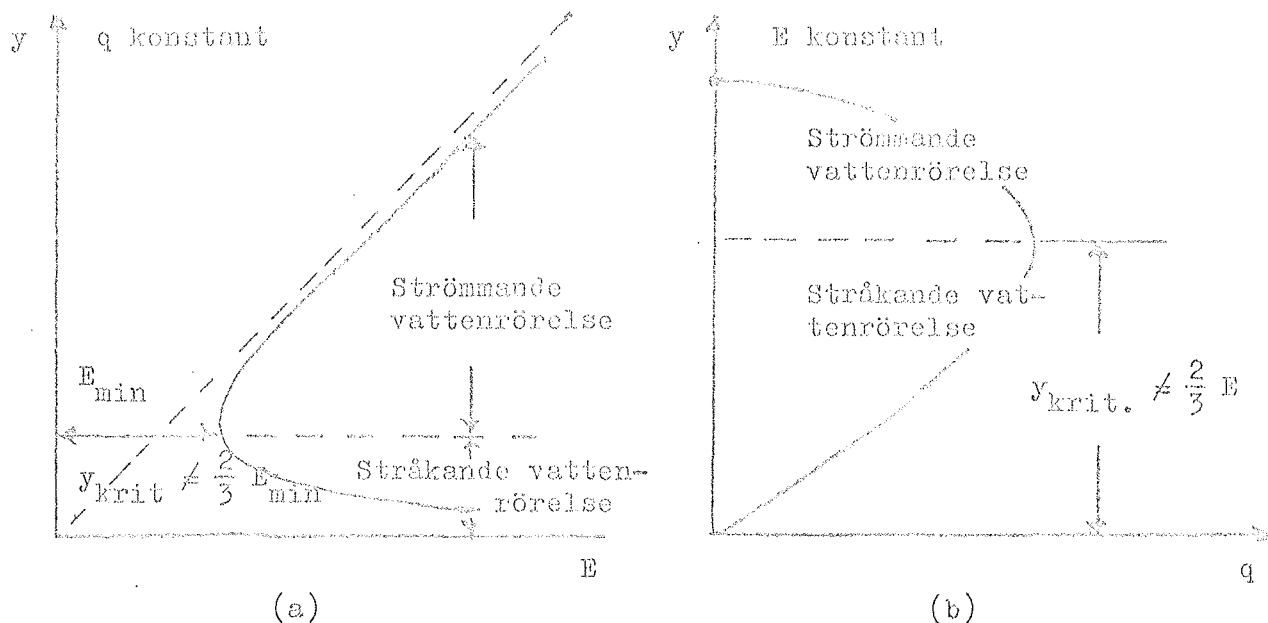


Fig. 11.9. Specifika energien och flödet i kanaler med tvärsnitt av godtycklig form. (a) Specifika energien för givet flöde och varierande djup; (b) flödet för given specifik energi och varierande djup.

Ur fig. 11.8 har vi att $dA = b dy$ där b är kanalbredden vid vätskeytan. dA/dy blir således lika med b och substitution i ekvationen ovan ger

$$\frac{q^2}{g} \frac{b}{A^3} = 1 \quad 11.4.12$$

en ekvation som tillåter beräkning av det kritiska djupet i icke rektangulära kanaler.

Substitution av \bar{v} för q/A i ekv. 11.4.12 ger oss möjlighet att beräkna ett Froudes tal, eller

$$F = \sqrt{\frac{q^2}{g} \frac{b}{A^3}} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{g(A/b)}} \quad 11.4.13$$

Det är tydligt, att liksom för breda rektangulära kanaler är vattenrörelsen strömmande för $F < 1$ och stråkande för $F > 1$.

11.5 Differentialekvationen för olikformig (varierad) stationär strömning

Differentialekvationen för olikformig (varierad) stationär strömning kan härledas med hjälp av fig. 11.10. Diskussionen begränsas till olikformig strömning i en kanal med rektangulärt eller trapezförmigt tvärsnitt. Vid-

re förutsättes strömning med raka och parallella strömlinjer över en botten med liten lutning I_0 .

Härledningen göres också under antagandet att de Chezy's formel $\bar{v} = C\sqrt{R_h I}$ gäller här liksom vid likformig strömning.

Den totala höjden H kan med hjälp av Bernoullis ekv. för en ledningssektion i fig. 11.10 skrivas

$$H = z + y + \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

där z är höjden över ett godtyckligt nollplan, y är vattendjupet och $\bar{v}^2/2g$ hastighetshöjden i sektionen.

Deriveras detta uttryck med avseende på förflyttningen s längs en strömlinje i strömningens riktning fås

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{v}^2}{2g} \right) \quad 11.5.1$$

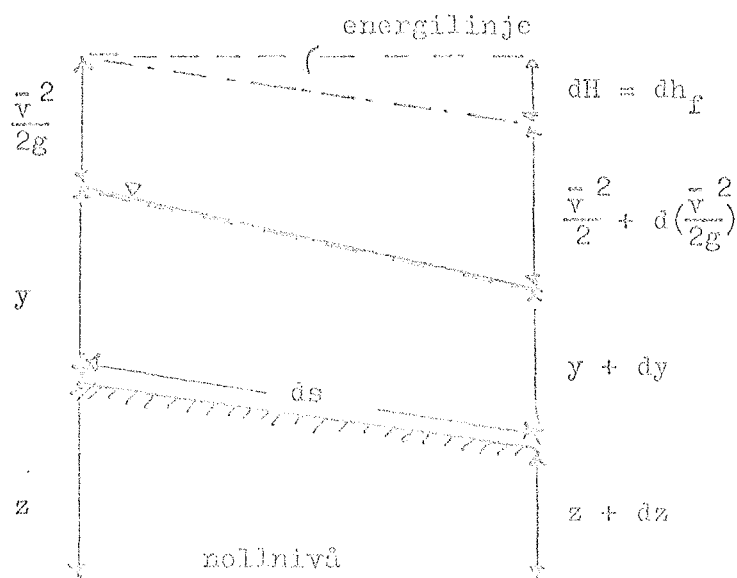


Fig. 11.10. Illustration till härledning av differentialekvationen för olikformig (varierad) strömning i en öppen ledning med rektangulärt tvärsnitt.

dH/ds i ekv. 11.5.1 anger energiförlusten per längdenhet och är alltid negativ i strömningens riktning. dh/ds är alltså numeriskt lika med 1 i

de Chezy's ekvation. Vi kan skriva

$$\bar{v} = C \sqrt{R_h I} = C \sqrt{R_h \left(-\frac{\partial H}{\partial s}\right)}$$

eller efter utveckling

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\bar{v}^2}{C^2 R_h} = -\frac{q^2}{C^2 A^2 R_h}$$

Termen dz/ds representerar ledningens lutning I_0 och eftersom dz här är negativt fås

$$\frac{dz}{ds} = -I_0$$

Termen dy/ds anger förändringen i vattendjupet per längdenhet av s och $d/ds (\bar{v}^2/2g)$ motsvarande för hastighetsböjden. Derivatan av den senare har redan beräknats i ekv. 11.4.10 till att vara $-q^2 b/g A^3$, där b är toppbredden av en tvärsektion med ytan A .

Vi kan nu skriva ekvation 11.5.1 under formen

$$-\frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} = -I_0 + \frac{dy}{ds} - \frac{q^2 b}{g A^3} \frac{dy}{ds}$$

eller alternativt

$$\frac{dy}{ds} = \frac{I_0 - \frac{q^2}{C^2 A^2 R_h}}{1 - \frac{q^2 b}{g A^3}}$$

respektive

11.5.2

$$\frac{dy}{ds} = \frac{I_0 - \frac{\bar{v}^2}{C^2 R_h}}{1 - \frac{\bar{v}^2 b}{C A^3}}$$

Ekv. 11.5.2 är en form av differentialekvationen för olikformig (varierad) stationär strömning, som genom transformationer kan fås att representera ett flertal profiler.

Som exempel anføres här en mycket bred ledning med rektangulärt tvärsnitt.

Vi antar bredden b och djupet y och får

$$R_h = \frac{\text{våta arean}}{\text{våta omkretsen}} = \frac{b \cdot y}{b + 2y}$$

Efter division med b erhålles

$$R_h = \frac{y}{1 + \frac{2y}{b}}$$

Är b mycket stor i förhållande till y blir termen $2y/b$ mycket liten och kan försummas. Resultatet blir

$$R_h = y = \text{vattendjupet}$$

Ekv. 11.5.2 kan då skrivas

$$\frac{dy}{ds} = \frac{I_0 - \frac{q^2}{C^2 A^2 y}}{1 - \frac{q^2 b}{g A^3}} \quad \text{resp.} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{I_0 - \frac{\bar{v}^2}{C^2 y}}{1 - \frac{\bar{v}^2}{g y}} \quad 11.5.3$$

Vi har på sidan 88 angivit att termen dy/ds uttrycker djupets förändring per längdenhet i strömningsriktningen. Den kan också sägas ange vattenytans lutning i förhållande till kanalens botten.

Det senare förhållandet ger oss möjlighet att med hjälp av ekv. 11.5.2 avgöra hur vattenytan löper i förhållande till botten i varje särskilt fall, om vi känner djup, tvärsnitt och flöde i en given punkt av en ledning.

Vi undersöker några specialfall.

$$1. \quad dy/ds = 0.$$

För $dy/ds = 0$ är djupet konstant och vattenytan blir parallell med botten,

dvs. strömningen är likformig.

Av förhållandet att $dy/ds = 0$ följer också att

$$I_0 - \frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} = 0$$

eller

$$q = C A \sqrt{R_h I_0}$$

Av ovanstående ekvation framgår, att det endast föreligger ett djup vid vilket strömningen är likformig. Detta benämnes, som förut påpekats, det normala djupet.

2. $dy/ds > 0$

Djupet växer här i strömriktningen, dvs. vattenytans lutning är mindre än bottenlutningen.

Ett studium av vattenytans form visar, att den är konkav uppåt längs ledningen. Strömningen är olikformig och en dämning föreligger.

3. $dy/ds < 0$

Vattendjupet avtar i strömningsriktningen med påföljd att vattenytans lutning blir större än bottenlutningen.

Vattenytan är konkav nedåt. Strömningen blir, som ovan, olikformig men nu med en föreliggande sänkning.

4. $dy/ds = \pm \infty$

I den föregående diskussionen har förutsatts att uttrycket $1 - \bar{v}^2 / C^2 y$ i ekv. 11.5.3 ej kunnat vara lika med noll, dvs. dy/ds har varit skilt från $\pm \infty$.

För $dy/ds = \pm \infty$ fås att

$$1 - \frac{\bar{v}^2}{C^2 y} = 0$$

eller

$$\bar{v} = \sqrt{g y}$$

11.5.4

Ekv. 11.5.4 är identisk med ekv. 11.4.9. Det visar sig, att strömnings-hastigheter i en öppen kanal ej kan växla från ett värde $\geq \sqrt{g y}$ till ett värde $< \sqrt{g y}$ och vice versa utan att vattenytan undergår en plötslig sänkning eller höjning; eller att en vågrörelse uppkommer.

Som redan omdömts kallas det djup y för vilket $\bar{v} = \sqrt{g y}$ för kritiskt djup, $y_{\text{krit.}}$, och motsvarande hastighet för kritisk hastighet, $\bar{v}_{\text{krit.}}$.

Är hastigheten $< \sqrt{g y_{\text{krit.}}}$ kallas, som förut påpekats vattenrörelsen strömande i motsatt fall stråkande.

Exempel 11.2. Hur stor är vattenytans lutning i en öppen kanal med rektangulärt tvärsnitt om bredden är 6 m, djupet 1,5 m, vattenföringen 5,4 m³/sek och bottenlutningen 0,2 o/oo. $C = 62$.

Lösning: Vi använder ekv.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{I_o - \frac{q^2}{C^2 A^2 R_h}}{1 - \frac{q^2 b}{g A^3}}}{}$$

Beräkning av A och R_h ger

$$A = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ m}^2$$

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{9}{6 + 2 \cdot 1,5} = 1 \text{ m}$$

Då fås

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{0,20}{1000} - \frac{5,4^2}{62^2 \cdot 9^2 \cdot 1}}{1 - \frac{5,4^2 \cdot 6}{9,81 \cdot 9^3}} = \frac{0,0001064}{0,9755} = 0,000109$$

eller 0,109 o/oo.

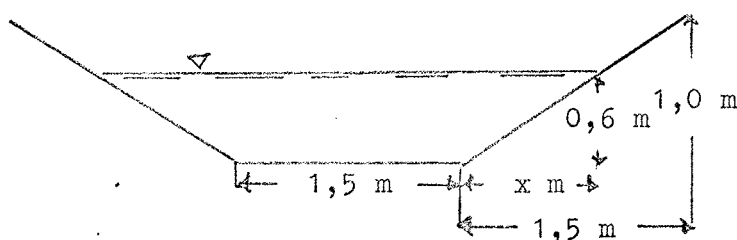
Vattendjupet ökar alltså med 10,9 cm/km. Vattenytans lutning mot horisontalplanet blir

$$20 - 10,9 = 9,1 \text{ cm/km}$$

Exempel 11.3. Beräkna specifika energien för ett öppet avlopp med bottenbredden 1,5 m, släntlutningen 1:1,5, vattendjupet 0,6 m och vattenföringen 1,15 m³/sek.

Lösning: Specifika energien kan fås ur relationen $E = y + \frac{\bar{v}^2}{2g}$. Beräkning av A ger

$$A = \frac{0,6}{2} (1,5 + 2x + 1,5)$$



Likformiga trianglar för bestämn. av x ger

$$\frac{x}{1,5} = \frac{0,6}{1} ; \quad x = 0,9$$

Då fås $A = 0,3 \cdot 4,8 = 1,44 \text{ m}^2$

$$\bar{v} = \frac{1,15}{1,44} = 0,8 \text{ m/sek.}$$

Således är

$$E = 0,6 + \frac{0,8^2}{2 \cdot 9,81} = 0,6 + \frac{0,64}{19,62} = 0,6 + 0,033 = 0,63 \text{ m vp.}$$

Exempel 11.4. Bestäm vattenrörelsens karaktär (strömmande eller stråkande) om det i en 4 m bred rektangulär ränna framrinner 0,7 m³/sek vid ett vattendjup av 0,3 m.

Lösning: Flödet q per breddenhet är $q = \frac{0,7}{4} = 0,175 \text{ m}^3/\text{sek.}$ Då fås för \bar{v}

$$\bar{v} = \frac{0,7}{4 \cdot 0,3} = \frac{0,7}{1,2} = 0,58 \text{ m/sek}$$

$$\text{Vi har att } y_{\text{krit.}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{0,175^2}{9,81}} = \sqrt[3]{0,0031} = 0,1456$$

$$\text{och att } \bar{v}_{\text{krit.}} = \sqrt{g y_{\text{krit.}}} = \sqrt{9,81 \cdot 0,146} = \sqrt{1,432} = 1,2 \text{ m/sek.}$$

Den rådande hastigheten är mindre än $\bar{v}_{\text{krit.}}$. Vattenrörelsen är alltså strömande.

11.6 Praktiska formler för beräkning av olikformig strömning

Den olikformiga strömningen är komplicerad och matematiskt svår att behandla.

Ur praktisk synpunkt kan vi studera den olikformiga strömningen under följande rubriker

- a) olikformig strömning i vattendrag med varierande tvärsektion
- b) olikformig strömning i kanaler med regelbunden tvärprofil.

I det senare fallet antas då djupet vara kontinuerligt växande (dämning) eller kontinuerligt avtagande (sänkning)

a. Olikformig strömning i vattendrag med varierande tvärprofil

Ekv. 11.5.1 sid. 87 kan vi skriva

$$-\frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} = -I + \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{v}^2}{2g} \right) \quad 11.6.1$$

där I anger vattenytans lutning mot horisontalplanet. Denna lutning är lika med bottenlutningen $-dz/ds$ plus vattenytans lutning mot botten $-dy/ds$. Alltså

$$I = \frac{dz}{ds} + \frac{dy}{ds} \quad 11.6.2$$

Studerar vi två tvärsektioner 1. och 2. på avståndet $\Delta l \approx \Delta s$ från varandra, så kan vi anta, att ekv. 11.6.1 approximativt är giltig inte bara för en bestämd sektion utan också för sträckan Δl , om medelvärden införs för de hydrauliska parametrarna, gällande sträckan ifråga.

Multiplikerar vi ekv. 11.6.1 och omgrupperar kan vi skriva

$$h_{f_{1-2}} = I_{1-2} \Delta l = \frac{q_{1-2}^2}{C_{1-2}^2 A_{1-2}^2 R_{h_{1-2}}} \Delta l + \frac{\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2}{2g} \quad 11.6.3$$

eller, eftersom $q_{1-2} = \bar{v}_{1-2} \cdot A_{1-2}$

$$h_{f_{1-2}} = \frac{\bar{v}_{1-2}^2}{C_{1-2}^2 R_{h_{1-2}}} \Delta l + \frac{\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2}{2g} \quad 11.6.4$$

Ekv. 11.6.4 är en för praktiska beräkningar lämpad form av ekv. 11.5.2.

Den kan sägas ange, att förlusthöjden på sträckan Δl är lika med friktionsförlusten plus förändringen i rörelseenergi. Den senare blir positiv, då hastigheten ökar (sänkning) och negativ då hastigheten minskar (dämning)

Detta antyder, att vid avtagande hastighet skulle $\Delta h_{f_{1-2}}$ bli mindre än friktionsförlusten på sträckan Δl . Så är emellertid ej fallet. Den frigjorda energien förbrukas i ökad virvelbildning.

Vid dämning kan vi därför sätta sista termen i högra ledet i ekv. 11.6.4 lika med noll, vilket i hög grad förenklar beräkningarna. Observera, att om den berörda termen är positiv kan den ej försummas.

Formel 11.6.4 förutsätter, att Δl valts så, att vattendjupet entydigt växer eller avtar inom sträckan. Skillnaden mellan A_1 och A_2 får ej heller vara större, än att strömning med tillräckligt god approximation kan antas vara likformig mellan sektionerna.

Beräkning av h_f för en sträcka l med hjälp av ekv. 11.6.4 sker enligt följande.

Sträckan l uppdelas i delsträckor Δl . Man känner de behövliga storheterna q , A_1 , \bar{v}_1 , C_1 , R_{h_1} i sektion 1. och vill beräkna vattenståndet i sektion 2. på avståndet Δl från sektion 1.

På försök antas en viss höjd på vattenytan i sektion 2. och A_2 , \bar{v}_2 , C_2 och R_{h_2} beräknas. Är ej sektionsformen konstant måste uppmätningar göras av

denna.

Med hjälp av de erhållna värdena fås sedan

$$\bar{v}_{1-2} = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2} ; \quad C_{1-2} = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad \text{etc.}$$

De beräknade medelvärdena insättes i ekv. 11.6.4. Blir nu $\Delta h_{f_{1-2}}$ approximativt lika med den antagna höjdskillnaden mellan vattenytorna i sektionerna är skattningen riktigt gjord. I motsatt fall göres nya passningar till dess önskad överensstämmelse uppnått. Dessa passningsberäkningar är ofta tidsödande och besvärliga, och göres numera helt med datamaskin.

b. Olikformig strömning i kanal med regelbunden tvärprofil. Dämning och sänkning

De i föregående avsnitt anförda beräkningarna kan även användas för bestämning av dännings- och sänkingskurvor.

Här är det emellertid möjligt att göra avsevärda förenklingar, eftersom man förutsätter konstant bottenbredd, d:o släntlutning och d:o skrovlighet konstant.

Förenklingarna möjliggör en integrering av den allmänna differentialekvationen för olikformig (varierad) stationär strömning (ekv. 11.5.2).

Vid krav på noggrannare beräkningar är dock passning med hjälp av ekv. 11.6.4 nödvändig.

Dämning och dänningskurvor

Fig. 11.11 visar några vanliga fall av dänningskurvor. I fig. 11.11a illustreras ett tillfälle där dämningen beror av att kanalbottens fall minskar vid oförändrad tvärsektion och vattenmängd. Ett exempel på dämning genom ökning av tillflödet vid i övrigt oförändrade yttre förhållanden ges i fig. 11.11b. I fig. 11.11c slutligen uppdämmas vattenytan i kanalen av en sjöyta, som ligger så högt att den förhindrar likformig strömning i den öppna ledningen.

Vattendjupet är störst intill den dännande sektionen (sektion 0), och avtar sedan kontinuerligt uppströms denna sektion.

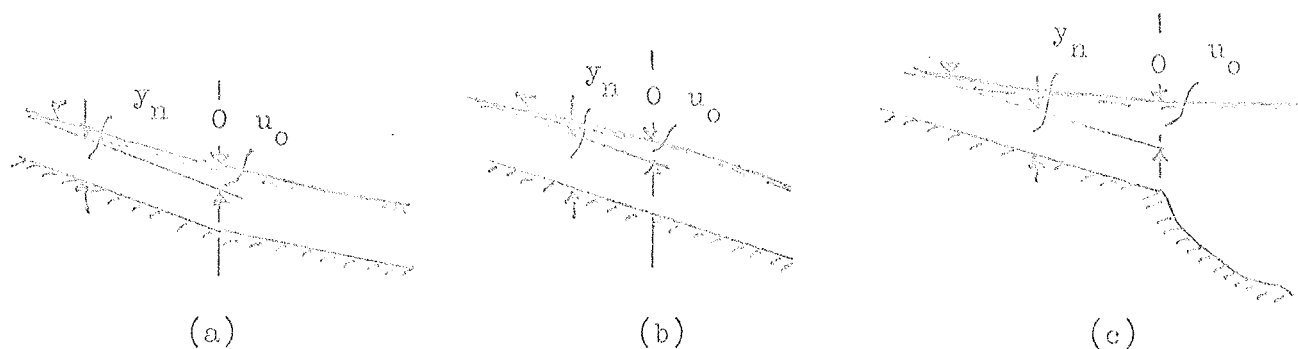


Fig. 11.11. Profilkurvor vid dämning; (a) Kanalbottens fall minskar vid oförändrad tvärsektion och vattenmängd; (b) tillflödet ökar vid oförändrad tvärsektion och oförändrat fall; (c) uppdämning genom en högt belägen sjöyta.

Detta medför också, att våta arean avtar uppströms och att hastigheten ökar i denna riktning. Vattenytans fall stiger successivt och ansluter sig asymptotiskt till den odämda vattenytan. Dämningskurvan är konkav uppåt.

Praktiskt antas, att dämningen upphör i den sektion där uppdämningen endast utgör 1 % av det normala vattendjupet y_n . Avståndet mellan denna sektion och sektionen 0 benämnes praktiska hydrodynamiska dänningsvidden.

Enligt vad som angivits på sid. 94 kan sista termen i ekv. 11.6.4 försummas vid passningsberäkningar av dänningskurvan. Således

$$h_{f_{1-2}} = \frac{\bar{v}_{1-2}^2}{c_{1-2}^2 R_{h_{1-2}}} \Delta l \quad 11.6.5$$

eller

$$h = \sum_{i=0}^n \Delta h_{f_{i-(i+1)}} = \sum_{i=0}^n \frac{\bar{v}_{i-(i+1)}^2}{c_{i-(i+1)}^2 R_{h_{i-(i+1)}}} \quad 11.6.6$$

Också under de förenklade antaganden, som här gjorts, blir passningsberäkningarna relativt arbetskrävande, och används endast då noggrannheten så fordrar.

Som tidigare anförts kan ekv. 11.5.2 och 11.5.3 under vissa antaganden om formen på ledningsektionen integreras. Flera sådana integrationer har

gjorts.

Sänkning och sänkningskurvor

Tre fall av sänkningskurvor redovisas i fig. 11.12. I fig. 11.12a orsakas sänkningen av att bottenlutningen efter en bestämd sektion ökar, varvid vattenytan sjunker och vattenhastigheten stiger, medan sänkningen i fig. 11.12b beror av en diskontinuerlig ökning av sektionsarean. Fig. 11.12c till slut är ett exempel på en sänkning uppkommen genom att vattendraget mynnar ut i en sjö, vars yta ligger lägre än vad som svarar mot en likformig strömning i vattendraget vid den rådande vattenföringen.

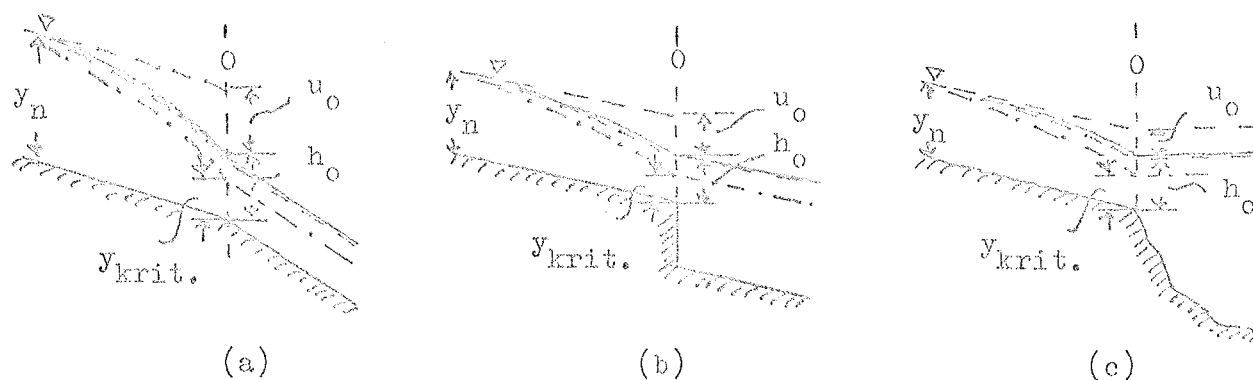


Fig. 11.12. Profilkurvor till sänkning; (a) Bottenlutningen ökar; (b) Vidgning av sektionsarean genom en diskontinuitet i bottenlutningen; (c) Sänkning genom en lågt belägen sjöyta.

I fig. 11.12 betecknar $y_{krit.}$ det kritiska djupet och den häremot svarande sektionen benämnes bestämmande sektion.

Dessa båda begrepp har, som tidigare anförts en särskild betydelse, då $y_{krit.}$ är det minsta djup som vid en given vattenföring kan uppkomma vid sektionen 0. Den maximala sänkningen kan skrivas

$$u_{max} = y_n - y_{krit.} \quad 11.6.7$$

Har kanalen ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b fås den häremot svarande vattenmängden q enligt ekv. 11.4.5 sid. 83 till

$$q = b \cdot \sqrt{\epsilon y_{krit.}^3} = b \sqrt{\epsilon y_{krit.}^{\frac{3}{2}}}.$$

Denna formel blir analog med formeln för maximalsvinnningen över ett brett överfall.

En sänkning av vattenytan i sjön i fig. 11.12c under den prick-streckade linjen skulle icke ytterligare påverka sänkningsskurvans förlopp, utan ett fall komme då att utbildas i sektionen 0.

I motsats till vad fallet är vid dämning, där den maximala dämningshöjden teoretiskt kan antas bli hur stor som helst, så är den möjliga sänkningen koncentrerad uteslutande till värden över $y_n - y_{krit.}$. Den maximala sänk-
ningsvidden, dvs. avståndet från sektionen 0 till den sektion där sänkning-
en endast utgör 1 % av y_n är alltså begränsad.

Liksom dämningsskurvor kan sänkningsskurvor beräknas med hjälp av ekv. 11.6.4. Eftersom, som tidigare anförts, den sista termen i högra ledet i denna ekv. ej kan försummas blir passningsberäkning av sänkningsskurvor ännu mera arbetskrävande än motsvarande beräkning för dämning.

Appendix

Partiella derivator och totala differentialisier

Partiella derivator

Om vi har ett funktions samband, där en variabel är beroende av flera oberoende variabler, så uttrycker en partiell derivata förändringen i den beroende variabeln med avseende på den oberoende variabeln, när alla övriga oberoende variabler hålls konstanta.

Vi studerar den envärda funktionen $z = f(x, y)$. Mot ett givet par av värden på x och y svarar då ett bestämt värde på z .

Antag nu att vi låter x ändras med mängden Δx , medan vi håller y konstant. Förändringen i z -värdet kan då tecknas

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Om vi dividerar Δz med Δx fås

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Denna kvantitet anger förändringen av z relativt x i medeltal över intervallet Δx . Låter vi nu $\Delta x \rightarrow 0$ och betecknar det erhållna gränsvärdet med $(\frac{\partial z}{\partial x})_y$ eller $\frac{\partial z}{\partial x}$ fås

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_y \quad \text{eller} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Detta gränsvärde, om det existerar, kallas partiella derivatan av z med avseende på x . Dess värde är den ögonblickliga (momentana) förändringen av z relativt x , när y hålles konstant.

På samma sätt fås, att förändringen av z med avseende på y , när x hålles konstant är

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_x \quad \text{eller} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Symbolerna $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ användas ävenledes för att beteckna partiella derivator av $f(x, y)$. Sålunda, om vi tecknar

$$f(x, y) = x y^2 + 3x^3$$

kan vi skriva

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 9x^2 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

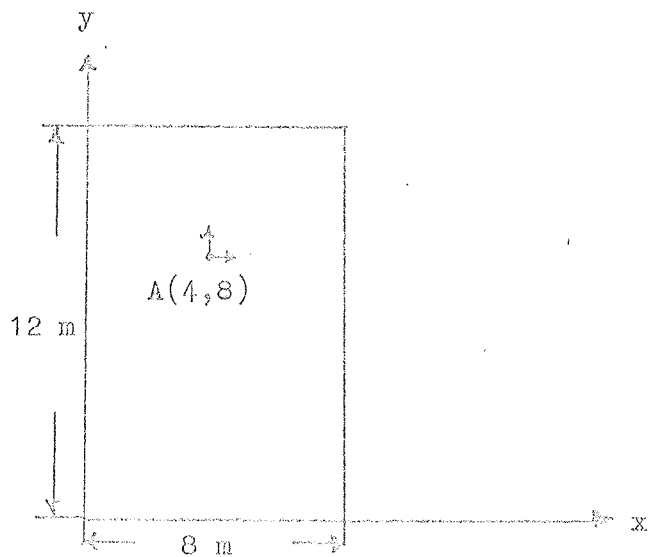
Följande exempel klargör den fysikaliska tolkningen av den partiella derivatan.

Yttemperaturen i $^{\circ}\text{C}$ är given i vilken som helst punkt (x, y) på plattan i nedanstående figur av relationen

$$T = \frac{1}{2} xy + 3x^2$$

Sök värdena på $\partial T / \partial x$ och $\partial T / \partial y$ i punkten A $(4, 8)$.

Lösning:



Vi har att

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{y}{2} + 6x$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{4,8} = 23 (^{\circ}\text{C per m})$$

Resultatet anger att temperaturen ökar i A med beloppet 23°C per m vid en rörelse längs plattan i x-axelns riktning.

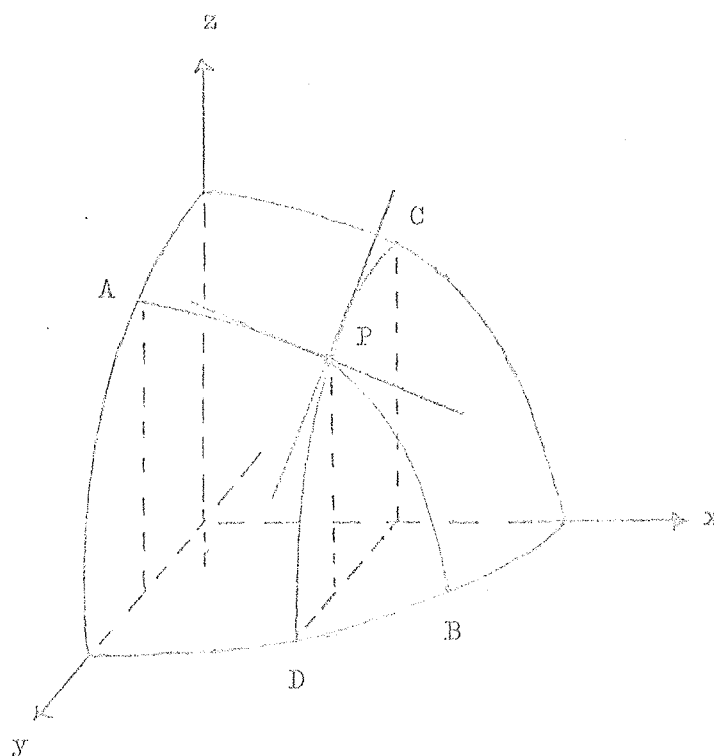
På samma sätt fås att

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{2} \quad \text{eller} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{4,8} = 2 \text{ (}^\circ\text{C per m)}$$

Således ökar temperaturen i y-riktningen med beloppet 2°C per m i punkten A.

Geometrisk tolkning

I allmänhet befinner sig de punkter vars koordinater satisfierar relationen $z = f(x, y)$ på en yta och vi säger att punkterna representerar ytan. Sålunda ligger de punkter, som satisfierar relationen $4z = x^2 + 3y^2$ på ytan av en elliptisk paraboloid.



För att erhålla den geometriska tolkningen av $\partial z / \partial x$ och $\partial z / \partial y$ låter vi P i ovanstående figur vara en punkt på ytan vars ekvation är $z = f(x, y)$.

Genom P läggs ett plan parallellt med xz-planet, och som skär kurvan APB från ytan.

Punkterna på denna kurva satisfierar de två ekvationerna

$$z = f(x, y) \quad \text{och} \quad y = k$$

Det är tydligt, att när en punkt rör sig längs denna kurva så varierar både z -koordinat med x medan dess y -koordinat förblir konstant.

Vi ser nu, att förändringen av z med avseende på x i P , som vi förut har betecknat med $\partial z / \partial x$, är lika med lutningen av tangentlinjen av denna kurva i P .

På samma sätt är värdet av $\partial z / \partial y$ i P lika med lutningen av tangentlinjen till kurvan CPD .

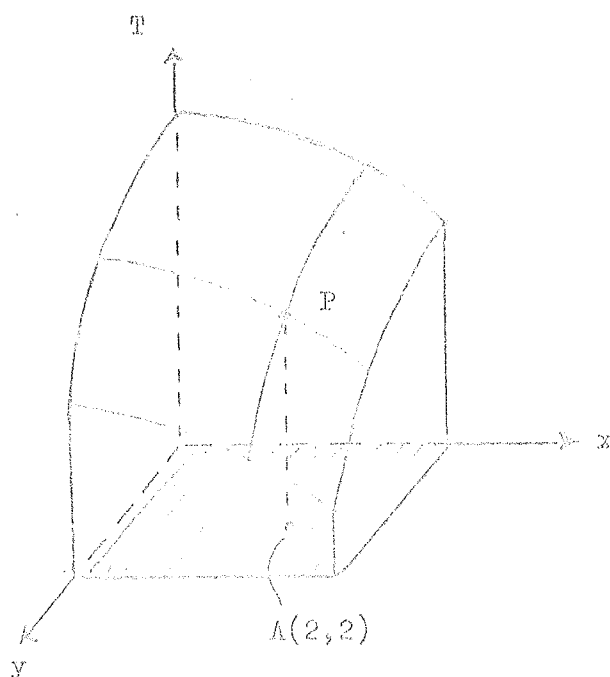
Dessa lutningar är naturligtvis positiva eller negativa beroende på om z ökar eller minskar när x (eller y) ökar.

För att samordna de fysikaliska och geometriska tolkningarna ges följande exempel.

Temperaturen i vilken som helst punkt av en platta 3 m i fyrkant är given genom relationen

$$T = 58 - \frac{4x^2}{3} - 3y^2 \quad (^\circ\text{C})$$

där koordinatsystemet är lagt som i nedanstående figur.



Från varje punkt på plattan kan vi upprita en ordinata vars längd representeras av temperaturen i punkten ifråga. Vi betraktar den yta som går genom de övre ändpunkterna av dessa ordinator.

Således när vi att i $A(2, 2)$ är $T = 40\frac{2}{3}^\circ\text{C}$ och motsvarande punkt på ytan är P . Då är

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{8x}{3} ; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{2,2} = -5\frac{1}{3} \quad (^{\circ}\text{C per m})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -6y ; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{2,2} = -12 \quad (^{\circ}\text{C per m})$$

Fysikaliskt representerar dessa derivator förändringen i temperaturen (med avseende på förflyttningen längs plattan) i x- och y-riktningarna respektive.

Geometriskt representerar de lutningarna av de två kurvor, som är dragna på bilden ovan.

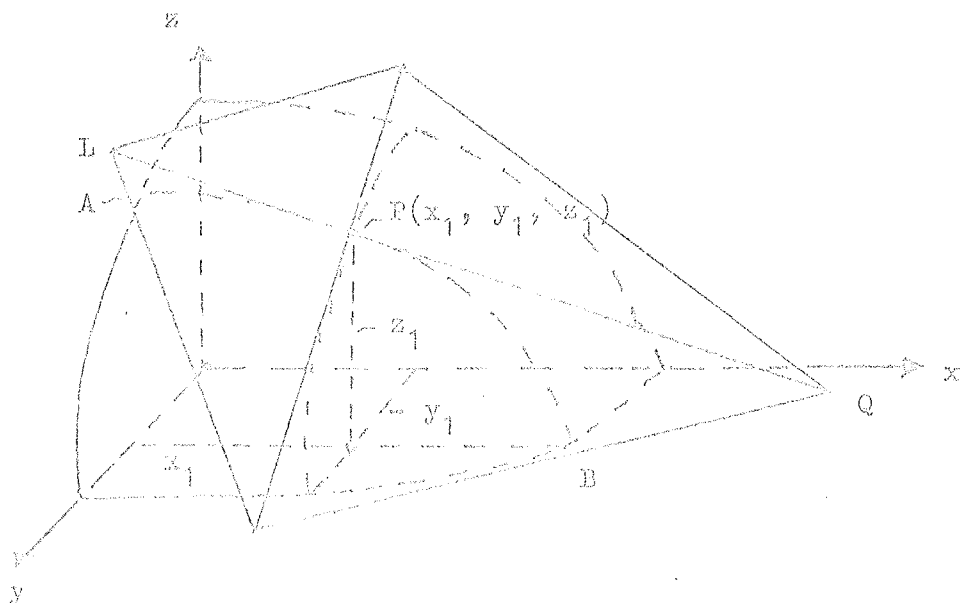
Tangentplan

Låt $P(x_1, y_1, z_1)$ vara vilken som helst punkt på ytan vars ekvation är $z = f(x, y)$. Ekvationen för vilket som helst plan genom P kan då skrivas

$$z - z_1 = A(x - x_1) + B(y - y_1)$$

Att denna ekvation representerar ett plan genom P oavsett vilka värden som sättes A och B framgår av det förhållandet att den är av första graden i x och y och satisfieras av koordinaterna i P .

Vi vill nu bestämma A och B så att ovanstående ekvation representerar tangentplanet till ytan i P . Vi gör det med hjälp av nedanstående figur.



Planet $y = y_1$ skär kurven APB från ytan och i P är lutningen av denna kurva lika med värdet $\partial z / \partial x$.

Samma plan ($y = y_1$) skär linjen LPQ från planet bestämt enligt ekvationen ovan. Denna linje har ekvationerna $y = y_1$ och $z - z_1 = A(x - x_1)$ och dess lutning är därför lika med A .

För att nu planet skall vara tangent till ytan måste linjen vara tangent till kurvan APB i P. Detta innebär att A i ekvationen ovan måste vara lika med värdet av $\partial z / \partial x$ i P.

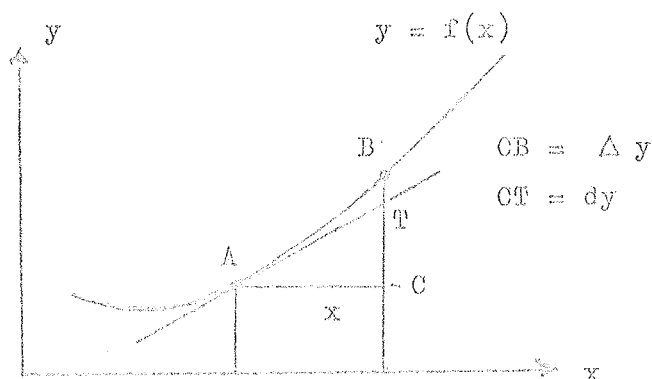
Genom att betrakta sektionen som åstadkommes av planet $x = x_1$ kan på samma sätt visas att B måste vara lika med värdet av $\partial z / \partial y$ i P. Ekvationen för tangentplanet till ytan blir då

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_1)$$

Totala differentialer

Om vi betraktar en funktion $y = f(x)$ så kallas kvantiteten $dy = f'(x) \Delta x$ för differentialen av denna funktion.

Differentialen är användbar när man söker den approximativa förändringen i värdet på $f(x)$ förorsakad av en liten förändring Δx i x .



Som framgår av ovanstående figur är

$$y = CB = f(x + \Delta x) - f(x)$$

medan

$$dy = CT = f'(x) \Delta x$$

Det närliggande uttrycket fås genom att multiplicera tangentens lutning i A med Δx . Om Δx är litet och $f'(x) \neq 0$ så är $CT = dy$ (se fig.) en god approximation till Δy . Förhållandet är, att skillnaden mellan Δy

och dy är en infinitesimal av högre ordning än Δx (eller Δy) när $\Delta x \rightarrow 0$, vilket framgår av följande

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{f'(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{f'(x)} = \frac{f'(x)}{f'(x)} = 1$$

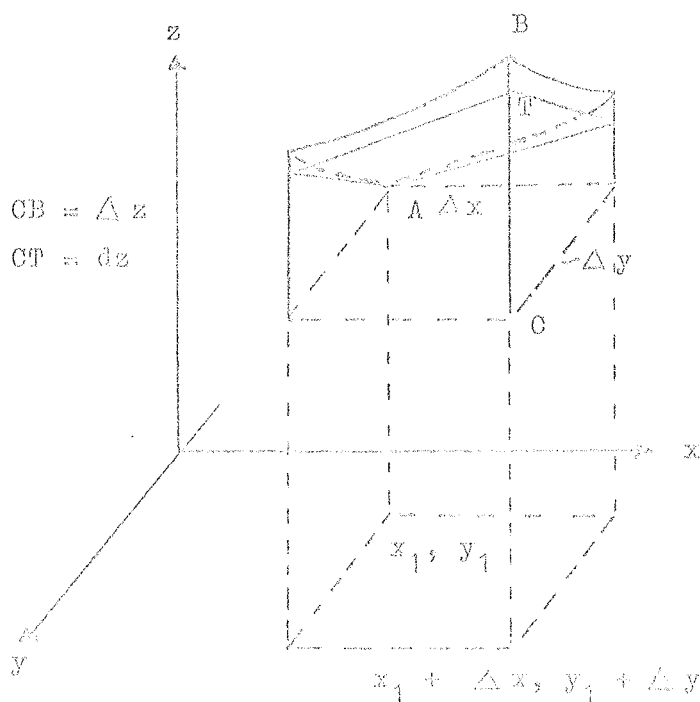
Om vi betecknar funktionen $f(x)$ med bokstaven y kan vi nu skriva dess differential som ovan, $dy = f'(x) \Delta x$.

I det fall att vi har två oberoende variabler är situationen helt analog.

Antag att vi, utgående från $A(x_1, y_1, z_1)$ på ytan $z = f(x)$, låter x och y ändras med små tillskott Δx och Δy respektive. Se nedanstående figur. Förändringen i funktionen z blir då

$$\Delta z = CB = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$$

Som en approximation till Δz kan vi använda den del som representeras av CT , som är ökningen i ordinaten till tangentplanet.



Ekvationen för detta plan blir då enligt ekvationen på sid. 105

$$z - z_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A (y - y_1)$$

Om vi sätter $x - x_1 = \Delta x$ och $y - y_1 = \Delta y$ fås

$$OT = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A \Delta y$$

Det är tydligt, att $OT = dz$ är en god approximation till Δz om Δx och Δy är tillräckligt små och om de partiella derivatorna ej är noll samtidigt.

Det kan visas att om $\partial z / \partial x$ är kontinuerliga i närheten av A då är ökningen Δz given exakt av uttrycket

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

där ε är en kvantitet, som närmar sig noll när Δx och Δy går mot noll. Beviset tillhör den avancerade matematiken.

Resultatet är att kvantiteten

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A \Delta y$$

skiljer sig från Δz endast med $\varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, som är en infinitesimal av högre ordning än både Δx och Δy , när dessa tillskott går mot noll. Approximationerna kallas också den totala differentialen av funktionen z och betecknas dz . Således

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Det är brukligt att definiera tillskotten i de oberoende variablerna genom relationerna $dx = \Delta x$ och $dy = \Delta y$ och att ersätta Δx och Δy i uttrycket ovan med dx respektive dy .

Slutligen, vare sig x och y är oberoende variabler eller ej, så definierar vi totala differentialen av funktionen $z = f(x, y)$ till att vara

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Här måste understrykas att $dx = \Delta x$ och $dy = \Delta y$ om x och y är oberoende variabler. Emellertid om, t.ex. $x = g(t)$ och $y = h(t)$ där t är oberoende, så fås

$$dx = g'(t) dt \quad \text{och} \quad dy = h'(t) dt$$

där $dt = \Delta t$

Totala differentialen av en funktion av tre eller flera variabler definieras på samma sätt. Sålunda, om $U = f(x, y, z)$, så ger kvantiteten

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

approximativt förändringen i U förorsakad av förändringarna dx , dy och dz i variablerna x , y och z .

Den fysikaliska betydelsen av den totala differentialen framgår av följande exempel.

1. En sluten metalllåda är invändigt 180 cm lång, 120 cm bred och 90 cm hög. Metalltjockleken är 0,15 cm. Sök ett approximativt uttryck på metallens volym.

Lösning: Metallens volym är lika med ökningen av lådans volym, när dess sidor förlängs från 180, 120 och 90 cm till 180,3, 120,3 och 90,3 cm respektive. Då fås om $V = x y z$, $dx = dy = dz = 0,3$ cm och $x = 180$, $y = 120$ och $z = 90$ cm.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 120 \cdot 90 \cdot 0,3 + 180 \cdot 90 \cdot 0,3 +$$

$$+ 180 \cdot 120 \cdot 0,3 = 90 \cdot 0,3(120 + 180 + 240) = 27 \cdot 540 = 14580 \text{ cm}^3 =$$

$$= 14,58 \text{ dm}^3$$

Svar: Metallens volym approximativt $14,58 \text{ dm}^3$

2. Metallen i ett cylindriskt kärl är 0,04 cm tjock både i lock, botten och sida. Den invändiga radien r är 10 cm och motsvarande höjd h är 20 cm. Sök ett approx. uttryck på metallens yta.

Lösning: Metallens volym är lika med ökningen av cylindervolymen, när dess radie förlängs från 10 cm till 10,04 cm och dess höjd d:o från 20 cm till 20,08 cm.

Vi har då att

$$V = \pi r^2 h$$

$$\text{och } dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2\pi h r dr + \pi r^2 dh$$

Insättning av $r = 10$ cm, $h = 20$ cm, $dr = 0,04$ cm och $dh = 0,08$ cm ger

$$dV = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,04 + \pi \cdot 100 \cdot 0,08 = 16\pi + 8\pi = 24\pi$$

Svar: Metallens volym approximativt $75,4 \text{ cm}^3$

3. Specifika vikten s för en fast kropp kan beräknas ur formeln

$$s = \frac{a}{a - b}$$

där a och b är kroppens vikt i luft och vatten respektive. Om $a = 6$ kg och $b = 3$ kg med ett skattat fel i varje av 0,025 kg, hur stort blir då det motsvarande skattade felet i s ?

Lösning: Vi har att $da = db = 0,025$, ds sökes.

Vi deriverar funktionen $s = \frac{a}{a - b}$ partiellt, och får eftersom

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{(a - b) \cdot 1 - a \cdot 1}{(a - b)^2} = \frac{-b}{(a - b)^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = \frac{(a - b) \cdot 0 - a \cdot 1}{(a - b)^2} = \frac{-a}{(a - b)^2}$$

Totala differentialen blir då

$$ds = \frac{\partial s}{\partial a} da + \frac{\partial s}{\partial b} db = \frac{-b}{(a-b)^2} da + \frac{a}{(a-b)^2} db$$

Insättning ger

$$ds = \frac{-3}{(6-3)^2} 0,025 + \frac{6}{(6-3)^2} 0,025 = 0,025 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{0,025}{3} = 0,008$$

Svar: Skattade felet i s = 0,008 kg

4. Värdet av en funktion av formen $k x^m y^n$ är beräknad ur mätningar av x och y. Visa att relativa felet i värdet på funktionen är lika med m gånger relativa felet i x plus n gånger relativa felet i y.

Lösning: Vi har sambandet

$$z = k x^m y^n$$

och söker relativa felet i funktionen eller $\frac{dz}{z}$

Vi logaritmerar funktionen och får

$$\ln z = \ln k x^m + \ln y^n$$

Differentiering ger

$$\frac{1}{z} dz = \frac{1}{k x^m} m k x^{m-1} dx + \frac{1}{y^n} n y^{n-1} dy$$

eller

$$\frac{dz}{z} = m \frac{dx}{x} + n \frac{dy}{y} \quad \text{V.S.B.}$$

Totala derivator

Vi har studerat ekvationen $z = f(x, y)$ för det fall i vilket x och y representerar oberoende variabler. Låt oss nu betrakta relationen definierad av de två ekvationerna

$$z = f(x, y) \quad \text{och} \quad y = g(x)$$

Här är z en funktion av x och y medan y i sin tur är en funktion av x . Sålunda kan z skrivas som en funktion enbart av den oberoende variabeln x , och vi kan härleda en formel för förändringen i z relativt x .

Om x ges ett tillskott Δx , då ändras y , som ju är beroende av x , med motsvarande tillskott Δy . Förändringen åstadkommen i z blir då

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

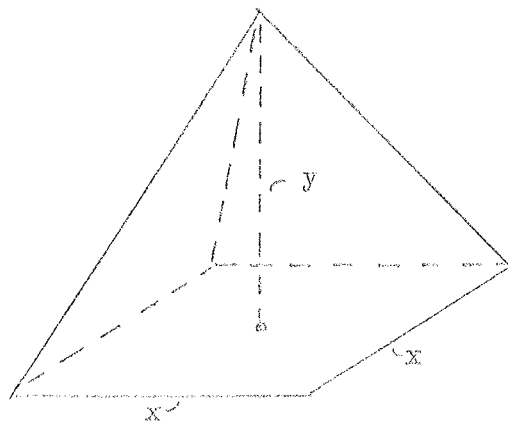
alltså samma uttryck som på sidan 8. Om vi dividerar Δz med Δx och sedan låter $\Delta x \rightarrow 0$ så fås

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Denna derivata kallas totala derivatan av z med avseende på x . Dess fysikaliska betydelse framgår av följande exempel.

Volymen av pyramiden i nedanstående figur är $V = \frac{1}{3} x^2 y$. Antag att x och y båda tillåts variera, ej oberoende men enligt relationen $y = 2\sqrt{x+3}$. Då fås

$$V = \frac{1}{3} x^2 y \quad y = 2\sqrt{x+3}$$



Den totala derivatan med avseende på x blir

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x y + \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3} x y + \frac{1}{3} x^2$$

Vi sätter x värdet 16 cm. Ur relationen mellan x och y ovan finner vi att $y = 2\sqrt{16+3} = 11$ cm. Motsvarande värde på dV/dx blir

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=16} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 11}{3} + \frac{16^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{352}{3} + \frac{512}{3} = \frac{864}{3} = 288$$

Resultatet anger, att om x tillåtes variera och om y ej hålles konstant utan i sin tur varierar i enlighet med relationen $y = 2\sqrt{x+3}$, då ökar V , för $x = 16$ cm, 288 cm³ för varje cm ändring i x . Det måste ånyo betonas att $\partial V / \partial x$ mäter förändringen av V relativt x om y hålles konstant.

Vi studerar nu ekvationerna

$$z = f(x, y) ; \quad x = g(t) ; \quad y = h(t)$$

Ekvationerna ovan definierar z som en funktion av en enda variabel t , varför vi kan härleda en formel för förändringen av z relativt t .

Vi går tillväga som förut, men dividerar Δz med Δt istället för Δx .

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Låter vi nu $\Delta t \rightarrow 0$, så fås

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Utvidgningen till fall med flera variabler är entydig. En av användningarna av denna totala derivata är vid problem förbundna med förändringar med tiden.

Antag, t.ex. att $U = f(x, y, z)$ och att i ett givet ögonblick x , y och z ändras med tiden dx/dt , dy/dt och dz/dt respektive. Den motsvarande förändringen med tiden i U blir då

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Exempel

1. Höjden av en rät cirkulär kon är 60 cm och ökar med 0,75 cm/min. Basradion är 22,5 cm och denna minskar med 0,15 cm/min. Hur förändras volymen med tiden?

Lösning: Vi har ett $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ och att volymens förändring med tiden kan uttryckas genom totala derivatan eller

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Då fås

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2 \pi h r}{3} ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3} ; \quad \frac{dr}{dt} = -0,15 \text{ och } \frac{dh}{dt} = 0,75. \text{ För}$$

$h = 60 \text{ cm}$ och $r = 22,5 \text{ cm}$ blir volymförändringen

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 22,5}{3} \cdot -0,15 + \frac{\pi \cdot 22,5^2}{3} \cdot 0,75 = \\ &= 22,5 \pi (-120 \cdot 0,05 + 22,5 \cdot 0,25) = -8,4375 \pi = \\ &= -26,5 \text{ cm}^3/\text{min} \end{aligned}$$

Svar: Volymsminskning med tiden av $26,5 \text{ cm}^3/\text{min}$

2. Trycket, volymen och absoluta temperaturen hos en gas är förbundna med varandra enligt ekvationen $p \cdot v = 50 T$. I ett givet ögonblick är $p = 0,086 \text{ bar}$ och minskar med $0,0115 \text{ bar/min}$ medan temperaturen är $T = 660^\circ\text{C}$ och ökar med $0,8^\circ\text{C}$ per minut. Hur förändras volymen med tiden?

Lösning: Vi har relationen $p \cdot v = 50 T$. Totala derivatan blir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$\text{Ur ekvationen } v = 50 \frac{T}{p} \text{ fås då } \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{p \cdot 0 - 50 T \cdot 1}{p^2} = \frac{-50 T}{p^2} ; \quad \frac{dp}{dt} = -0,0115 \text{ bar} = 1150 \text{ N/m}^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{p \cdot 50 - 50 T \cdot 0}{p^2} = \frac{50}{p} ; \quad \frac{dT}{dt} = 0,8$$

Totala derivatan för $p = 0,086 \text{ bar} = 8600 \text{ N/m}^2$ och $T = 660^\circ\text{C}$ blir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-50 \cdot 660}{8600^2} = -1150 + \frac{50}{8600} \cdot 0,8 = \frac{50}{8600} \left(\frac{759000}{8600} + 0,8 \right) =$$

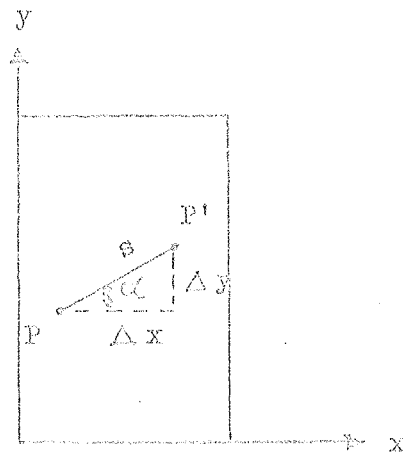
$$= 0,005814 (88,26 + 0,8) = 0,005814 \cdot 89,06 = 0,518$$

Svar: Volymökning av $0,518 \text{ m}^3/\text{min}$

Riktningsderivator

Vi låter temperaturen i vilken som helst punkt av ytan i nedanstående figur representeras av ekvationen

$$T = f(x, y)$$



Redan har konstaterats att värdet av $\partial T / \partial x$ i vilken som helst punkt $P(x, y)$ anger temperaturförändringen med avseende på förflyttningen - t.ex. i $^{\circ}\text{C}$ per cm - längs x-riktningen. På samma sätt visar $\partial T / \partial y$ motsvarande ändring i T längs y-riktningen.

Vi kan nu härleda ett uttryck för ändringen i T med avseende på förflyttningen i vilken som helst riktning.

Antag att det sker en förflyttning Δs i figuren ovan från P till P' . Motsvarande förflyttningar i x- och y-riktningarna blir då Δx och Δy , respektive. Då fås att

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

och att riktningen är bestämd av vinkeln α .

Förändringen i värdet på T , motsvarande förflyttningen från P till P' kan då tecknas enligt det föregående

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Vi dividerar ΔT med Δs , dvs. förflyttningen längs ytan och får

$$\frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}$$

Men $\Delta x / \Delta s = \cos \alpha$ och $\Delta y / \Delta s = \sin \alpha$. Med dessa substitutioner införda i ekv. ovan och efter att ha låtit $\Delta s \rightarrow 0$ erhålles

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha$$

Ovanstående uttryck anger riktningsderivatan för T i riktningen α .

Vi kan undersöka dT/ds för maximum och minimum i en viss punkt på ytan genom att derivera med avseende på

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dT}{ds} \right) = \frac{\partial T}{\partial x} (-\sin \alpha) + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \alpha$$

Sättes ekvationen ovan lika med noll och löses med avseende på α fås

$$\frac{\partial T}{\partial y} \cos \alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \sin \alpha ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}}{\frac{\partial T}{\partial x}}$$

Maximum för dT/ds uppträder när α har detta värde ($2^{\text{der.}}$ blir negativ) och från ekv.

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha$$

fås att

$$\left. \frac{dT}{ds} \right|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2}$$

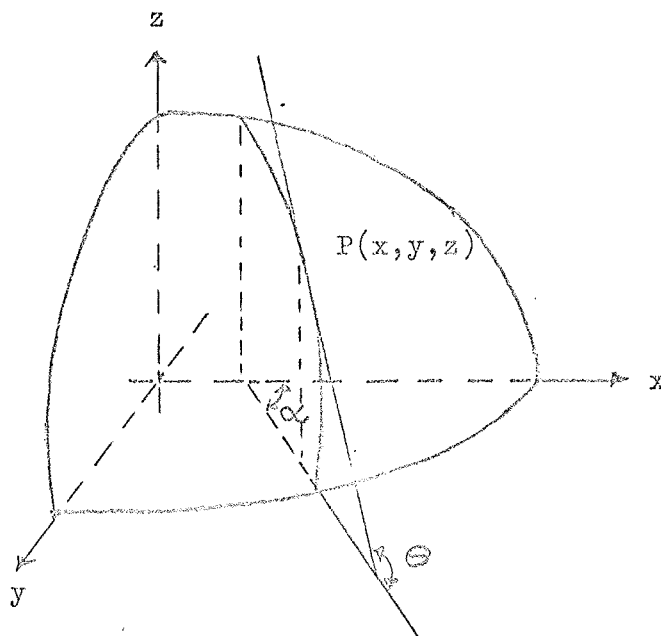
Denna den största förändringen i T kallas gradienten av temperaturen i punkten.

Om $z = f(x, y)$, så är

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$$

riktningsderivatan av z i riktningen α enligt ovan. Dess värde anger förändringen i z med avseende på förflyttningen i xy -planet i den valda riktningen.

Om vi låter ekvationen $z = f(x, y)$ representera en yta, då anger riktningsderivatan lutningen av en linje, som är tangent till kurvan och har riktningen α enligt följande figur.



Det numeriskt största värdet på dz/ds i en given punkt kallas gradienten av funktionen i punkten.

Dess värde är enligt ovan

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}$$

Detta kan tolkas geometriskt såsom varande den brantaste lutningen för en tangentlinje, som kan dras till ytan i en viss punkt. Vinkeln α , som bestämmer denna tangent är given genom relationen (se ovan)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}}$$

Exempel:

Om $T = 2xy + 3y$, där x och y är cm och T °C, då är

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2y \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 2x + 3$$

I punkten $(3, 3)$ har vi att $\partial T / \partial x = 6$ och $\partial T / \partial y = 9$ (°C per cm).

Om vi nu sätter $\alpha = 45^\circ$ så fås för denna riktning

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 6 \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7,5 \sqrt{2} = 10,6^\circ \text{C per cm}$$

I punkten $(3, 3)$ är maximala förändringen i temperaturen

$$\left. \frac{dT}{ds} \right|_{\max} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 10,8^\circ \text{C}$$

Maximumvärdet fås i riktningen given av

$$\text{tg } \alpha = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Förteckning över utkomna häften i serien STENCILTRYCK

- Nr 1 Håkansson, A. 1952. Redogörelse för resultaten av 1951 års täckdikningsförsök. 71 sid.
- Nr 2 Håkansson, A. 1953. Redogörelse för resultaten av 1952 års täckdikningsförsök. 64 sid.
- Nr 3 Håkansson, A. 1954. Redogörelse för resultaten av 1953 års täckdikningsförsök. 84 sid.
- Nr 4 Berglund, G. & Eriksson, J. 1955. Redogörelse för resultaten av 1954 års täckdikningsförsök. 97 sid.
- Nr 5 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1956. Redogörelse för resultaten av 1955 års täckdikningsförsök. 59 sid.
- Nr 6 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1957. Redogörelse för resultaten av 1956 års täckdikningsförsök. 66 sid.
- Nr 7 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1958. Redogörelse för resultaten av 1957 års täckdikningsförsök. 56 sid.
- Nr 8 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1959. Redogörelse för resultaten av 1958 års täckdikningsförsök. 66 sid.
- Nr 9 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1960. Redogörelse för resultaten av 1959 års täckdikningsförsök. 70 sid.
- Nr 10 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1961. Redogörelse för resultaten av 1960 års täckdikningsförsök. 53 sid.
- Nr 11 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1962. Redogörelse för resultaten av 1961 års täckdikningsförsök. 59 sid.
- Nr 12 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1963. Redogörelse för resultaten av 1962 års täckdikningsförsök. 57 sid.
- Nr 13 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1964. Resultat av 1963 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 63 sid.
- Nr 14 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1965. Resultat av 1964 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 75 sid.
- Nr 15 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1966. Resultat av 1965 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 82 sid.
- Nr 16 Hallgren, G. 1940. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; Några hydrografiska och hydrotekniska studier. 30 sid.
- Nr 17 Hallgren, G. 1942. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient. 27 sid.
- Nr 18 Hallgren, G. 1943. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning. 161 sid.
- Nr 19 Andersson, S. 1952. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydromekanik. 162 sid.
- Nr 20 Andersson, S. 1952. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller med kommentarer och exempel till Kompendium i elementär hydromekanik. 22 sid.
- Nr 21 Andersson, S. 1960. Kapillaritet. 115 sid.
- Nr 22 Andersson, S. 1961. Markens temperatur och värmehushållning. 25 sid.

- Nr 23 Johansson, W. 1962. Bevattningsförsök i potatis, korn och foderbetor vid Tönnersa försöksgård 1959-1961. 13 sid.
- Nr 24 Johansson, W. 1962. Metodik och erfarenheter vid användning av hålkort för undersökning av torrläggningssförhållanden och ytsänkning vid Nedre Olandsån. 10 sid.
- Nr 25 Johansson, W. 1962. Utredning för förslag till bevattningsanläggning vid Sör Salbo, Salbohed, Västmanlands län. 9 sid.
- Nr 26 Andersson, S. 1963. Skrivningar i agronomisk hydroteknik. 50 sid.
- Nr 27 Berglund, G. & Sjöberg, S. 1964. Undersökning av plaströrsdikningar. 15 sid.
- Nr 28 Håkansson, A. 1964. Anvisning rörande täckdikning med plaströr av styv PVC. 5 sid.
- Nr 29 Berglund, G. 1966. Vattendragsförbundet: Förslag till överenskommelse och stadgar samt något om kostnadsfördelningar. 19 sid.
- Nr 30 Fahlstedt, T. 1966. Kvismaredalsprojektet -- en orientering samt Redogörelse för undersökning i syfte att klargöra avkastningens berende av högvattenstånden i Kvismare kanal. 29 sid.
- Nr 31 Hallgren, G. 1966. Vattenrätt. 77 sid.
- Nr 32 Brink, N. 1966. Hydrologi. 17 sid.
- Nr 33 Jonsson, Y. 1967. Ytplanering med planersladd. 36 sid.
- Nr 34 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1967. Resultat av 1966 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 85 sid.
- Nr 35 Nitsch, U. 1967. Om östersjövattnets användbarhet för bevattningsändamål. 35 sid.
- Nr 36 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G. & Eriksson, J. 1968. Resultat av 1967 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 96 sid.
- Nr 37 Brink, N. 1968. Ansvarsfördelningen vid underhåll av vattendrag inom Sagåns vattensystem. 10 sid.
- Nr 38 Håkansson, A., Johansson, W. & Fahlstedt. 1968. Nederbördens storlek och fördelning. En detaljstudie av nederbördsdata från 16 nederbördsstationer. 175 sid.
- Nr 39 Berglund, G. 1968. Om genomsläppligheten i återfyllning och rörfogar. 14 sid.
- Nr 40 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1969. Resultat av 1968 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 83 sid.
- Nr 41 Brink, N. 1969. Kväve och fosfor i Sävjaån. 10 sid.
- Nr 42 Brink, N. 1969. Sagåns vatten. 33 sid.
- Nr 43 Johansson, W. 1970. Anvisningar för projektering och dimensionering av bevattningsanläggningar. 34 sid.
- Nr 44 Hallgren, G. 1970. Dränering av tomtmark, vägar, trädgårdar, kyrkogårdar, idrottsplatser, flygfält m. m. 140 sid.
- Nr 45 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1970. Resultat av 1969 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 73 sid.

- Nr 46 Berglund, G. 1971. Kalkens inverkan på jordens struktur. 10 sid.
- Nr 47 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G. & Eriksson, J. 1971. Resultat av 1970 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkförsök. 77 sid.
- Nr 48 Sandsborg, J. 1971. Exempelsamling i hydromekanik. 148 sid.
- Nr 49 Eriksson, J. 1971. Bevattning. Tropiskt jordbruk. 21 sid.
- Nr 50 Eriksson, J. 1971. Erosion. Tropiskt jordbruk. 27 sid.
- Nr 51 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G. & Eriksson, J. 1972. Resultat av 1971 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkningsförsök. 78 sid.
- Nr 52 Andersson, S. 1972. Agrohydrologi. Skrivningar för 5 poäng med svar, lösningar och kommentarer. 100 sid.
- Nr 53 Berglund, G. 1973. Försök med påskyndad snösmältning. 11 sid.
- Nr 54 Kristiansson, L. & Sundéll, G. 1973. Studier av arbetstiden för olika bevattningssystem. 81 sid.
- Nr 55 Andersson, P.-O. & Rydén, M. 1973. Studier av arbetstiden vid ändbogsering av spridarledning. 16 sid.
- Nr 56 Berglund, G. & Hofvendahl, G. 1973. Inventering av dämningmöjligheterna inom Sävjaåns avrinningsområde. 14 sid.
- Nr 57 Berglund, G. 1973. Slamavsättning i släta och i korrugerade dräneringsrör av plast. 25 sid.
- Nr 58 Bjerketorp, A. 1973. Envertikalsmetoder med flytar- eller flygel-mätning för approximativ bestämning av flöde i små vattendrag. Preliminärt förslag. 86 sid.
- Nr 59 Bjerketorp, A. 1973. Fyra metoder för approximativ bestämning av flöde i små vattendrag genom mätning av vattenhastigheten i en enda vertikal. 2:a, översedda uppl. 20 sid.
- Nr 60 Bjerketorp, A. 1973. Några metoder för avkortad mätning och beräkning av flöde i små vattendrag. Del I: Avkortade metoder vid flygel-mätning: Några allmänna förutsättningar för mätningsproceduren och dess utvärdering. 32 sid.
- Nr 61 Andersson, Ö. & Bjerketorp, A. 1973. Vattenföringsmätning i små vattendrag med ytflytare enligt en maximalyt-hastighetsmetod. 7 sid.
- Nr 62 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G., Linnér, H. & Eriksson, J. 1973. Resultat av 1972 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkningsförsök. 88 sid.
- Nr 63 Andersson, Ö. 1973. Underhåll av vattendrag. II: Maskiner och redskap för mekanisk vegetationsbekämpning och slamrensning. 44 sid.
- Nr 64 Eriksson, J. 1973. Undersökning av olika typer av filter vid dränering. 14 sid.
- Nr 65 Sandsborg, J. 1973. Kompendium i elementär hydromekanik. I: Hydromekanikens grunder. 210 sid.
- Nr 66 Sandsborg, J. 1973. Kompendium i elementär hydromekanik. II: Hydromekanikens tillämpning. 116 sid.

Denna skriftserie, benämnd Stenciltryck, utges av Avdelningen för lantbrukets hydroteknik vid Institutionen för markvetenskap, Lantbrukshögskolan. Serien utkommer i fri följd och innehåller undersökningsresultat och annat material, som avdelningen funnit angeläget att redovisa, men som av olika anledningar ej befunnits möjligt att framlägga i tryck, exempelvis i den från institutionen utgivna tidskriften Grundförbättring. Sådana anledningar kan vara att ett arbete är för omfångsrikt att trycka, är av mera preliminär natur eller vänder sig till en för liten grupp av läsare.

Serien finns tillgänglig vid avdelningen, och enskilda nummer kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Lantbrukshögskolan, Inst. för markvetenskap, Avd. för lantbrukets hydroteknik, 750 07 Uppsala 7.

Address: Agricultural College of Sweden, Dept. of Soil Science, Div. of Agr. Hydrotechnics, S-750 07 Uppsala 7, Sweden.